

クラック先端における応力拡大係数に関する基礎的研究

佐竹 亮一^{*1} 平坂 佳子^{*1} 持田 敦子^{*2} 浜野 浩幹^{*3}

Fundamental Research of the Stress Intensity Factor in the Tip of a Slit Crack

Ryouichi SATAKE, Yoshiko HIRASAKA, Atsuko MOCHIDA and Hiroki HAMANO

Abstract

The authors already discussed the crack tip singularities of various kinds of open crack meeting at the interfaces of different materials for plane problems. The stress conditions of crack tip can use not only stresses or strains but also the stress intensity factor K . In this paper, we try to compute these factors K by the finite element method in various crack types. The calculated solution examines whether it is right compared with a theoretical solution.

Key words: Crack tip, Stress, Stress intensity factor, Finite element method.

1. はじめに

現在、構造物の大型化や溶接構造の発達、構造材料の強度的な向上に伴い、構造物を構成する材料・部材のクラック進展による破壊現象に対する検討が重要な問題となっている。

破壊はクラックやその他の欠陥の発生、成長、合体などによって生じることが多い。クラック先端の力学的環境条件として、応力拡大係数 K というパラメータを用い、この応力拡大係数 K によって、クラック先端の応力状態を知ることができる。

この応力拡大係数 K を有限要素法による数値解析から求める方法について検討する。

ここで用いた例題は多くの研究者によって既に解が得られている^{1),2)}が、有限要素法の解の確認のために行ったものである。

2. 応力拡大係数 K

き裂面の変位様式は、図1に示す3つの成分に分けて考えることができる¹⁾。この独立な3つのき裂面の変位様式を、それぞれモード（開口モード）、モード（面内せん断モード）、モード（面外せん断モード）という。

^{*1}松江高専。 ^{*2}松江高専 専攻科。 ^{*3}土木工学科。

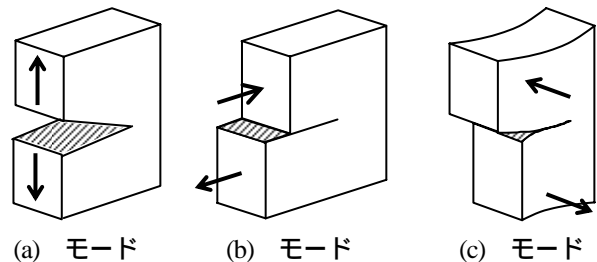


図1 3つの基本的なき裂面の変位様式

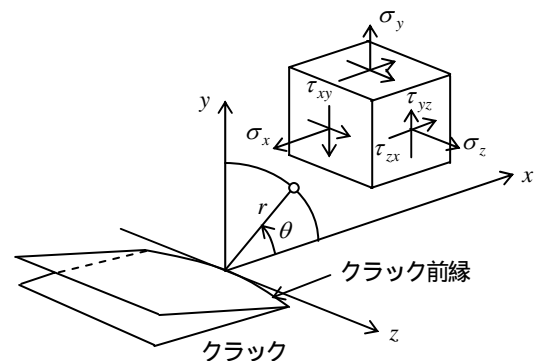


図2 3次元任意形状き裂の前縁にとった座標系

図2は z 軸がクラック前縁の接線、 x 軸がき裂面の主法線、 y 軸がき裂面に垂直な法線となるような直角座標 (x, y, z) と、円柱座標 (r, θ, z) を示す。

6個の応力成分 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) の形はそれぞれ以下ようになる。

モード

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

モード

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

モード

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ただし、モード とモード に対しては

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (\text{平面応力}) \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

であり、モード に対しては以下ようになる。

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

ここで K, K, K は応力拡大係数であり、き裂先端で考えた座標系に無関係なパラメータである。式(1), (2), (3)からわかるように、き裂先端の応力分布は K の大小でそのレベルが決まる平行曲線として図3のように与えられる。言い換えれば、き裂先端、すなわち $x=0$ では K の値に無関係に常に $\sigma_y = \infty$ であるが、き裂先端から離れた任意の点 x での応力は K の値で一義的に決まり、 K の値と共に増大する。 K はそれぞれのき裂面の変位様式に対して異なる値をとるから、一般にモード , モード およびモード のそれぞれについて K, K および K の記号で表示する。

以下では、モード の場合のみを取り扱い、 K の添え字 は省略する。

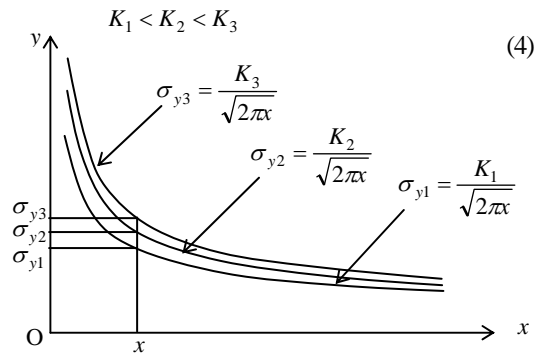


図3. き裂先端の応力分布と応力拡大係数の関係

3. 有限要素法による応力拡大係数の計算

(1) 応力拡大係数の計算

式(1)において $\theta=0$ とおけば、次式が得られる。

$$K = \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

上式の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を有限要素法によって計算し、応力拡大係数を求める。

まず、図4のような片側にクラックのある帯板の一樣引張りの場合の応力拡大係数を求める。この場合の理論値は次式で求められる²⁾。

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} F(a/W); \text{ここで } a/W = \xi \text{ とおくと} \quad (5)$$

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \tan \frac{\pi \xi}{2} \frac{0.752 + 2.02\xi + 0.37\{1 - \sin(\pi \xi/2)\}^3}{\cos(\pi \xi/2)}}$$

ここでは、 $W=4, \sigma=1, a=1$ として計算した。以下、全ての例題に対してこれを用いる。

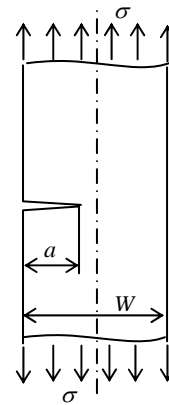


図4. 片側にクラックのある帯板の一樣引張り

表1に計算結果と式(4)に σ_x, σ_y を代入し得られた応力拡大係数を示す。

表1. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	1.73	2.48	1.94	2.78
0.4	1.08	1.79	1.71	2.84
0.8	0.58	1.36	1.31	3.05

き裂先端は数値上の特異点になり、き裂の先端付近では応力の分布が急激に変化するので、き裂先端にごく近い要素の計算結果は使わず、少し離れた要素の計算結果を使う。図5は表1から r と応力拡大係数 K の関係を示す。ここから r が限りなく0に近づいたときの値を2次関数の外挿によって求め、応力拡大係数 K の値とする。

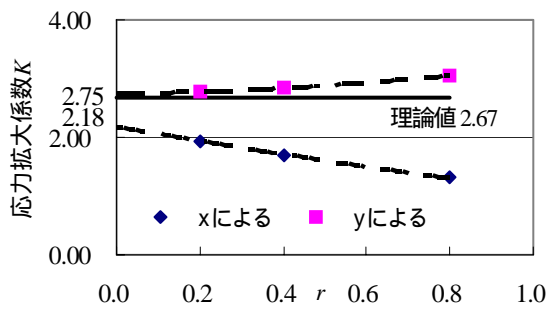


図5. 応力拡大係数 K

次に、図6に示すようなクラックの例についての応力拡大係数を有限要素法によって求める。

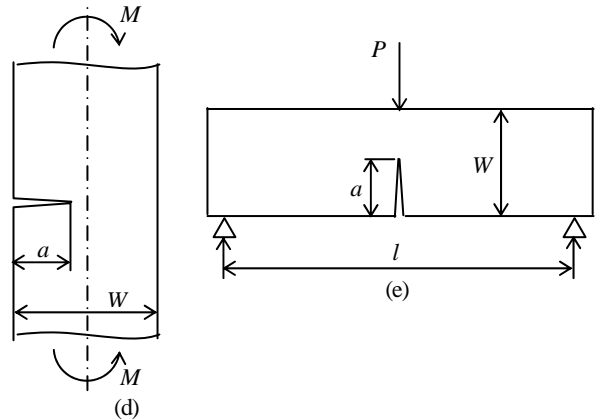
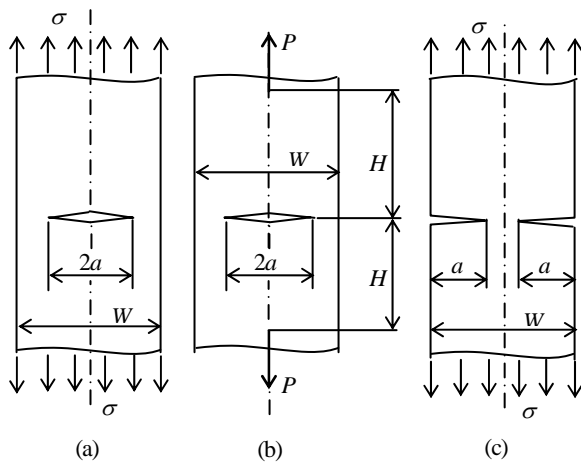


図6. 計算例

(a) 中央にクラックのある帯板の一樣引張り (図6(a))
この例の理論値は次式で求められる。

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} F(2a/W); \text{ここで } 2a/W = \xi \text{ とおくと } \left. \begin{aligned} & F(\xi) = (1 - 0.025\xi^2 + 0.06\xi^4) \sqrt{\sec(\pi\xi/2)} \end{aligned} \right\} (6)$$

表2に計算結果と図7に得られた応力拡大係数を示す。

表2. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	0.82	2.16	0.92	2.42
0.4	0.38	1.67	0.60	2.64
0.8	0.05	1.30	0.11	2.93

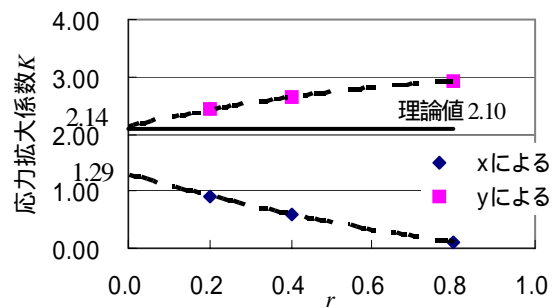


図7. 応力拡大係数 K

(b) 中央にクラックのある帯板の集中力による引張り (図6(b))

この例の理論値は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 &K = (P/\sqrt{W})F(2a/W, 2H/W); \\
 &\text{ここで } 2a/W = \xi, 2H/W = \eta \text{ とおくと} \\
 &F(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) \cdot f_2(\xi, \eta) \cdot f_3(\xi, \eta) \\
 &\text{ただし,} \\
 &f_1(\xi, \eta) = 1 + \{0.297 + 0.115(1 - \sec h(\pi\eta/2))\} \sin \pi\xi \\
 &\quad \times (1 - \cos(\pi\xi/2)) \\
 &f_2(\xi, \eta) = 1 + \alpha \frac{(\pi\eta/2) \tanh(\pi\eta/2)}{\cosh^2(\pi\eta/2) / \cos^2(\pi\xi/2) - 1}, \\
 &\quad \alpha = \begin{cases} (1 + \nu)/2 \\ 1/2(1 - \nu) \end{cases} \\
 &f_3(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{\tan(\pi\xi/2)}}{\sqrt{1 - \cos^2(\pi\xi/2) / \cosh^2(\pi\eta/2)}}
 \end{aligned} \right\} (7)$$

ここで P は単位厚さあたりの力で $P=1$ とした。表 3 に計算結果と図 8 に得られた応力拡大係数を示す。

表 3. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	0.35	0.62	0.39	0.70
0.4	0.17	0.40	0.27	0.63
0.8	0.02	0.18	0.05	0.41

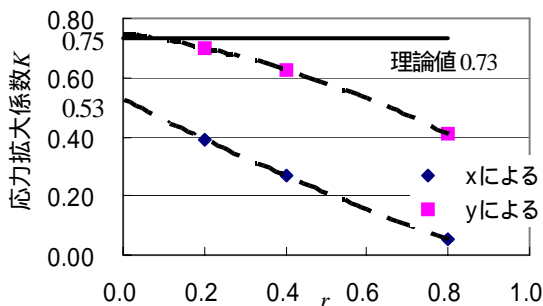


図 8. 応力拡大係数 K

(c) 両側にクラックをもつ帯板の引張り (図 6(c))

この例の理論値は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 &K = \sigma\sqrt{\pi a}F(2a/W); \quad 2a/W = \xi \text{ とおくと} \\
 &F(\xi) = (1 + 0.122 \cos^4(\pi\xi/2)) \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2}}
 \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで P は単位厚さあたりの力で $P=1$ とした。表 4 に計算結果と図 9 に得られた応力拡大係数を示す。

表 4. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	1.40	2.07	1.57	2.33
0.4	0.95	1.60	1.51	2.54
0.8	0.69	1.39	1.54	3.11

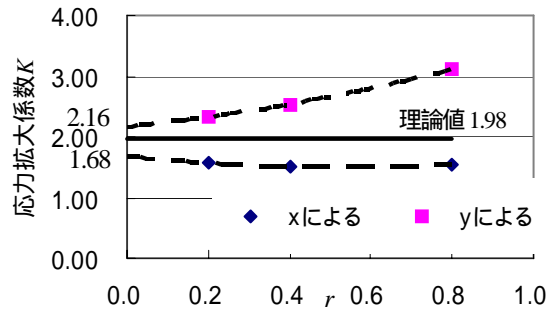


図 9. 応力拡大係数 K

(d) 片側にクラックのある帯板の単純曲げ (図 6(d))

この例の理論値は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 &K = \sigma\sqrt{\pi a}F(a/W); \\
 &\text{ただし, } \sigma = 6M/W^2 \text{ (外側曲げ応力, } M \text{ は} \\
 &\text{単位厚さあたりの曲げモーメント)} \\
 &a/W = \xi \text{ とおくと} \\
 &F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2} \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^4}{\cos(\pi\xi/2)}}
 \end{aligned} \right\} (9)$$

ここで M は $\sigma=1$ となるようにした。表 5 に計算結果と図 10 に得られた応力拡大係数を示す。

表 5. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	1.28	1.45	1.44	1.62
0.4	0.81	0.86	1.28	1.37
0.8	0.44	0.36	0.99	0.81

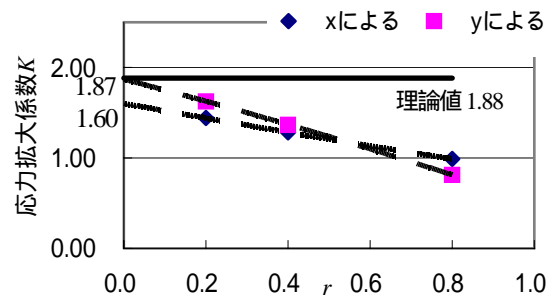


図 10. 応力拡大係数 K

(e) 片側にクラックのある帯板の3点曲げ(図6(e))

この例の理論値は次式で求められる.

$$\left. \begin{aligned}
 &K = \sigma \sqrt{\pi a} F(2a/W); \\
 &\text{ただし, } \sigma = 3lP/2W^2 \text{ (公称曲げ応力, } P \text{ は} \\
 &\text{単位厚さあたりの力)} \\
 &a/W = \xi, l/W = 8 \text{ とおく} \\
 &F(\xi) = 1.107 - 2.120\xi + 7.71\xi^2 - 13.55\xi^3 + 14.25\xi^4
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで P は $\sigma = 1$ となるようにした. 表6に計算結果と図11に得られた応力拡大係数を示す.

表6. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	1.51	1.29	1.69	1.45
0.4	0.89	0.79	1.42	1.26
0.8	0.39	0.39	0.87	0.87

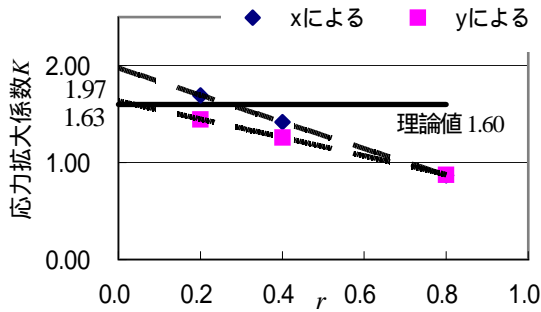


図11. 応力拡大係数 K

(2) クラックの進展

次にクラックの進展する場合を考える. 図4に示す片側にクラックのある帯板の一樣引張りの場合について, $a/W = 0.125, 0.25, 0.375, 0.5$ とクラックが進展する場合の応力拡大係数の変化を調べる. また3点から求めた応力拡大係数と4点の外挿から求めた応力拡大係数を比較する.

1) $a/W = 0.125$ の場合:

表7. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	2.18	2.86	2.44	3.21
0.4	1.44	2.06	2.29	3.27
0.8	0.90	1.58	2.02	3.55
1.6	0.52	1.29	1.63	4.08

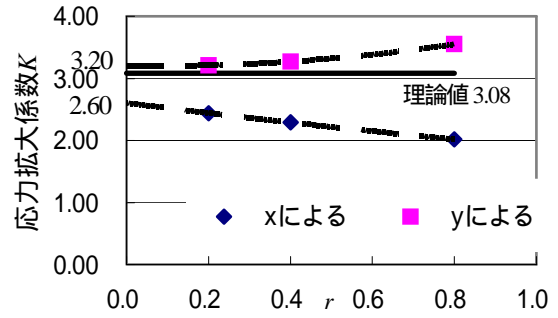


図12. 3点からの応力拡大係数 K

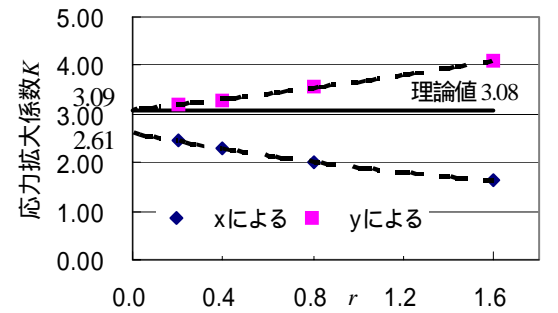


図13. 4点からの応力拡大係数

2) $a/W = 0.250$ の場合:

表8. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	2.18	2.86	2.44	3.21
0.4	1.44	2.06	2.29	3.27
0.8	0.90	1.58	2.02	3.55
1.6	0.52	1.29	1.63	4.08

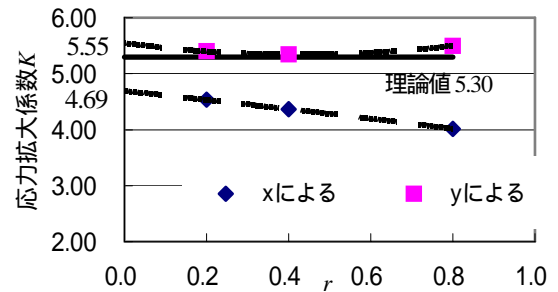


図14. 応力拡大係数 K

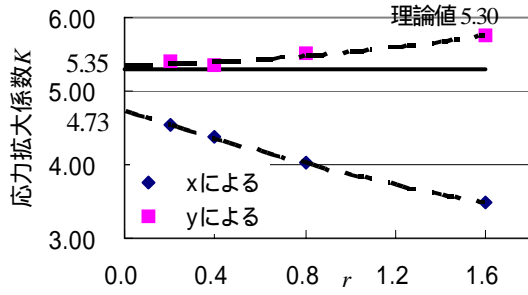


図 15. 応力拡大係数 K

3) $a/W = 0.375$ の場合 :

表 9. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	2.18	2.86	2.44	3.21
0.4	1.44	2.06	2.29	3.27
0.8	0.90	1.58	2.02	3.55
1.6	0.52	1.29	1.63	4.08

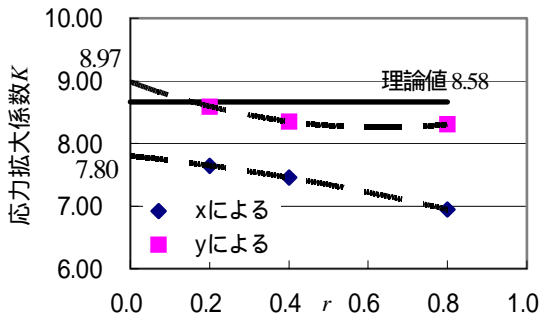


図 16. 応力拡大係数 K

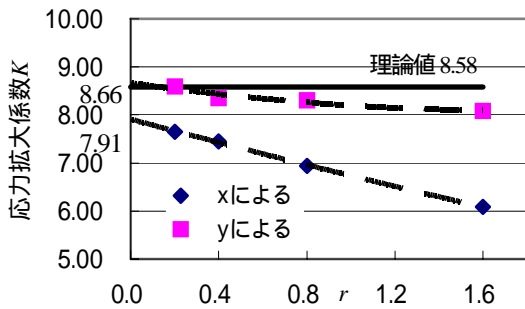


図 17. 応力拡大係数 K

4) $a/W = 0.500$ の場合 :

表 10. 計算結果と応力拡大係数

r	σ_x	σ_y	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_x$	$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_y$
0.2	2.18	2.86	2.44	3.21
0.4	1.44	2.06	2.29	3.27
0.8	0.90	1.58	2.02	3.55
1.6	0.52	1.29	1.63	4.08

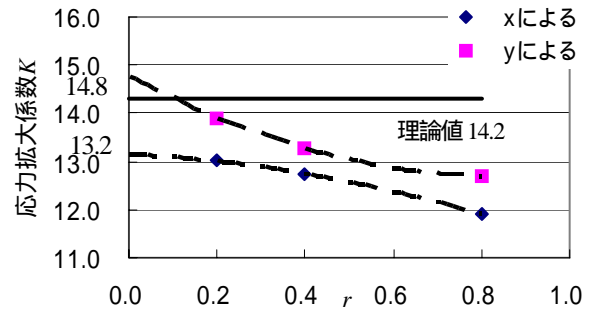


図 18. 応力拡大係数 K

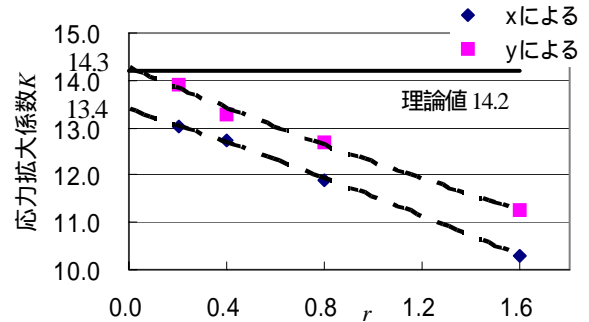


図 19. 応力拡大係数 K

以上に見られるように 4 点による応力拡大係数の決定は 3 点での決定より精度がよいことがわかる 4 点からの決定ではすべて誤差が 2% 以内で求めることができる。

4. おわりに

クラック先端の応力状態を知るために必要な応力拡大係数 K を有限要素法によって求める方法について検討し、この方法によって実用上重要ないくつかのクラックの例について適用し応力拡大係数 K を求めた。採用した例題からも分かるように、応力 σ_y から求めた方が理論値に近

い結果が得られている．有限要素法で近似計算した解を用いることが可能であることがわかった．

参考文献

- 1) 小林英男：破壊力学，共立出版，(1993)．
- 2) 岡村弘之：線形破壊力学入門，培風館，(1976)．
- 3) 結城良治：界面の力学，培風館，(1993)．
- 4) 平居孝之：有限要素法と境界要素法，共立出版，(1988)．
- 5) 藤谷義信：有限要素法によるクラック問題特異解の解析 - その 1 二次元クラック問題 - ，東京大学生産技術研究所報告，29-9，459～462．
- 6) 藤谷義信：2次元弾性体中のクラック先端の応力特異解の解析(その 1．特異点近傍の応力・変位の一般解の誘導)，日本建築学会学術講演梗概集，1105～1106(1984)．
- 7) 加藤巨邦，藤谷義信：2次元弾性体中のクラック先端の応力特異解の解析(その 2．異材結合面上に先端をもつクラックの応力特異性の解析)，同上，1107～1108．

(平成 14 年 12 月 2 日受理)

(060616)