

極異方性弾性体に対する二次元面内問題および面外問題の基本解

Fundamental Solutions of Two-Dimensional In-Plane Problems and Out-Plane Problems for Cylindrically Anisotropic Elastic Medium

角田雅之 (山梨大大学院) 正 平島健一 (山梨大) 正 浜野浩幹 (松江高専)
 Masayuki TUNODA, Graduate Student of Yamanashi Univ.
 Ken-ichi HIRASHIMA, Yamanashi University, 4-3-11, Takeda, Kofu, Yamanashi
 Hiroki HAMANO, Matsue College of Technology, 14-4, Nishi-ikuma, Matsue, Shimane

1. 緒言

円筒状の繊維複合材は制作の容易さや力学的諸特性のすぐれていることなどを踏まえて各方面で多用されている。それらの理論解析としては、例えば、Lekhnitskii の系統的な研究¹⁾、Pagano、Pagano & Tandon および Mikata & Taya らの Coated-Fiber を有する極異方性繊維材料の解析、Hoff による円孔を有する極異方性平板の応力解析、Das&Hazen、Liu&Bert による補強リングを有する無限弾性体の応力・変位解析などがある。また、内外圧を受ける極異方性円筒問題を取り扱ったものに Nowinski、Hagan&Baxter らの研究がある。

しかしこれらの論文では、極異方性弾性問題について、面外問題を含めて系統的に取り扱った論文は見当たらないのが現状である。本論文では面内荷重問題および面外せん断荷重の基本式を整理し、新しく得られた解を含めて系統的な閉じた型の厳密解を誘導し、無限平板内の円孔周縁に集中荷重が作用する問題の解析結果を示す。

2. 基礎関係式

表題の問題を解析するために応力関数 $F(r, \theta)$ を導入すると、まず、面内問題に対して応力、ひずみ成分は次式のよ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + a_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_\theta &= a_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \gamma_{r\theta} &= -a_{66} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

これらの式における係数 a_{ij} は極異方性弾性体の弾性コンプライアンスを表している。これらによって、各種応力関数の応力成分、変位成分をあらかじめ求めておけば、それらを適当に組み合わせることによって、種々の問題の解を

得ることが出来る。

また、面外問題の場合は、変位 u_z および応力関数 $\varphi(r, \theta)$ は同一の調和型の基礎方程式を満たせばよいことから、ある程度簡単に解析解が求められる。

3. 解析解および数値計算例

Fig.1 に示すような円孔を有する極異方性平板の面内に集中荷重 P および Q が作用する場合を考える。

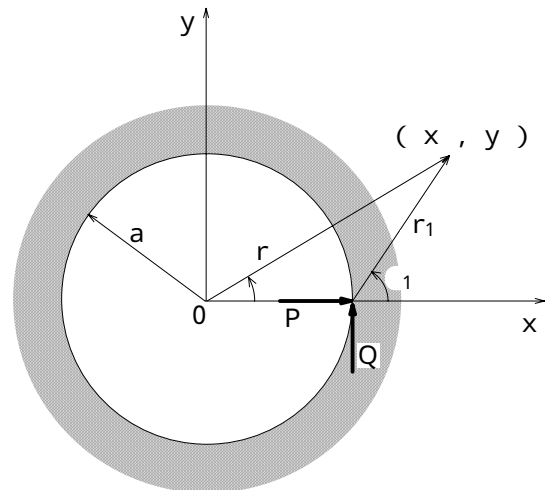


Fig.1 Infinite plate with circular hole concentrated forces P and Q at the boundary

まず、Fig.1 の集中荷重 P のみが作用する場合を考える。この場合の境界条件は、 $r = a$ (内部半径) の位置 (ただし、 $\theta = 0$ は除く) に対し、次のように与えられる。

$$\sigma_r |_{r=a} = 0, \quad \tau_{r\theta} |_{r=a} = 0. \quad \dots\dots\dots (3)$$

この問題に対する応力関数は、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} F(r, \theta) = & -\frac{P}{\pi} \left\{ r_1 \theta_1 \sin \theta_1 - \left(\zeta \beta a^{-\beta} - \frac{1}{2} \right) r \ln r \cos \theta \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(1-\alpha)} a^\alpha r^{1-\alpha} - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta - \zeta r^{1-\beta} \cos \theta \right\}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 r_1 および θ_1 は Fig.1 に示した距離および角度であり、また、 α, β, ζ および G_1 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}, \quad G_1 = \frac{1}{a_{22}}(a_{11} + 2a_{12} + a_{66}), \\ \beta &= \sqrt{1 + G_1}, \quad \zeta = \frac{a^2}{16} \left\{ 6 + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

同様に、Fig.1 の集中荷重 Q が作用する場合を考える。この問題に対する応力関数は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} F(r, \theta) &= \frac{Q}{\pi} \left\{ r_1 \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{1}{2} r \theta \cos \theta + \zeta r^{1-\beta} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\zeta \beta a^{-\beta} - \frac{1}{2} \right) r \ln r \sin \theta + \frac{a}{2} \theta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

式(4)、(6)を特殊化して等方性の弾性定数に縮退させれば、従来までの Timoshenko & Goodier の著書で示された解に帰着する。

ここでは、数値計算例として、Fig.1 で示した円孔を有する極異方性無限平板内部から集中荷重 P が作用する場合の円孔周辺の最大せん断応力

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \dots\dots (7)$$

を計算し、等高線の形で示した。

ここで、図中に用いられている最大せん断応力は、 $\tau_{\max} a^2 / P$ の形で無次元化して表示されている。

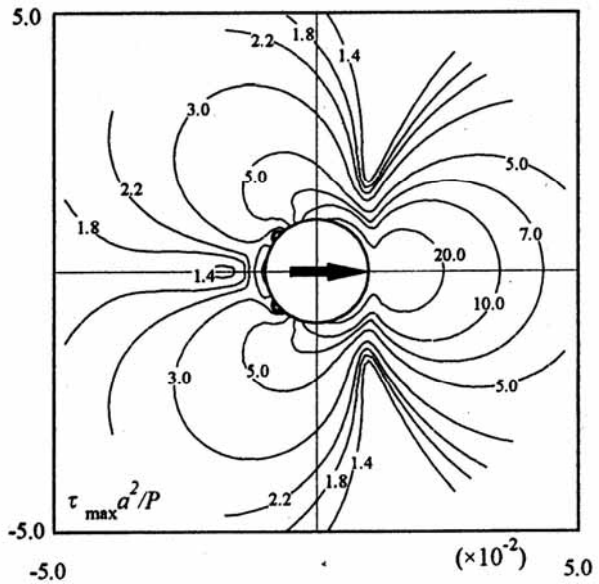


Fig.2 Distribution of τ_{\max} for isotropic infinite plate with circular hole concentrated force P at boundary

Fig.2, 3 の両方とも集中荷重荷点の付近で大きな応力が発生していることがよく分かる。また、いずれも水平軸について対称な分布を示している。

Fig.2 の等方性の場合と Fig.3 の極異方性の場合と比べると、集中荷重の載荷されている反対側の分布に両者の分布に大きな違いが現れており、同じ値を見ても、Fig.3 の

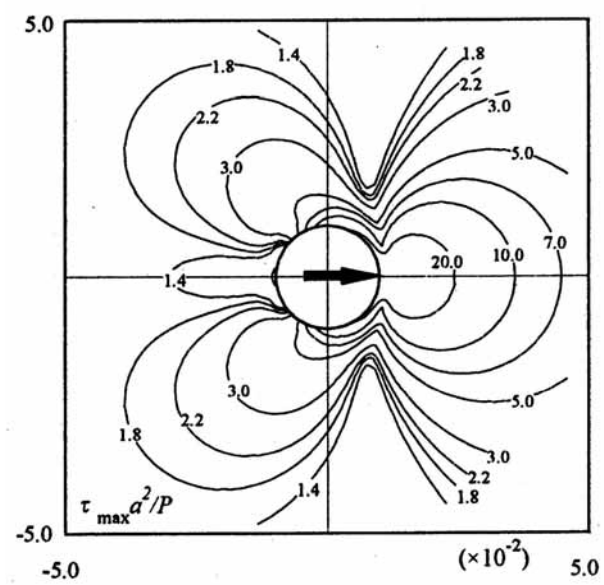


Fig.3 Distribution of τ_{\max} for cylindrically anisotropic infinite plate with circular hole concentrated force P at boundary

の極異方性体の方が、分布の広がりが小さくなっているのが分かる。これらの関係は、弾性コンプライアンスの値の取り方によって変わってくるものであると考えられる。

4. 結言

等方性体に対する古典弾性論の基本的な問題の場合と同様に、極異方性体に対する極座標表示の面内問題および面外せん断問題における、閉じた型の基本解とそれらに対応する応力、変位成分を具体的に求めた。それらの解を利用して無限板内の円孔周縁に集中荷重が作用する問題に対する閉じた形の解析解を提示し、数値計算例として無限板内の最大せん断応力分布を等高線で示した。

本研究によって、二次元極異方性弾性体の各種の基本解が求められた。ここでの成果は従来までに求められていない、幾つかの新しい解析解の提示もなされており、それらを利用した今後の応用や具体例への適用が種々期待できるものである。

文献

- 1) Lekhnitskii, S.G. : Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Mir Publishers, Moscow, (1981)
- 2) 平島健一：線形弾性論の二次元面内および面外問題の極座標系における基本解，山梨大学工学部研究報告，32,119-153，(1981)

(M&M 講演概要集，京都大学，991210)