

Williams の固有関数展開法および応力拡大係数

応力拡大係数は破壊力学において中心的な役割を果たすパラメータであり、この概念の導入によって、種々の現象に対するき裂の挙動を定量的に論じることが可能となり、破壊力学としてき裂の存在を前提として構造物の破壊や変形を取り扱うことができるようになった。

Williams は最初、均一部分材に任意の開き角を有する切欠き先端近傍の特異性が Airy の応力関数で

$$\chi = r^{\lambda+1} \cdot f(\theta, \lambda) \quad (1)$$

の形の級数で表されることを示した。ここで、

(r, θ) は切欠き先端を原点とする円柱座標、

λ は応力特異性を評価するパラメータ、

$f(\theta, \lambda)$ は釣合方程式から得られる微分方程式の一般解

である。

この方法は切欠き先端近傍の特異性を明らかにするには非常に有用であり、その後多くの研究者により研究、発展されてきた。

いま、き裂先端近傍の任意の点を、き裂前縁上を原点とする直角座標 (x, y, z) あるいは円柱座標 (r, θ, z) で表せば、 x, y, z に関する応力成分 $\sigma_{ij} (= \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ は z 座標に依存しない二次元弾性論ならびにねじりの弾性論が適用可能なき裂材の各変形様式に対して

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots \quad (2)$$

で表されるような、 \sqrt{r} の級数に展開できる。ここに、

$f_{ij}^{(1)}(\theta), f_{ij}^{(2)}(\theta), \dots$: 各変形様式に対して θ の既知関数、

$A_1 (= K/\sqrt{2\pi}), A_2, A_3, \dots$: き裂材の形状寸法、境界条件に依存する係数

である。

式(2)において

$r \rightarrow 0$ とするとき第 1 項は無限大に発散する ($r^{-1/2}$ の特異性をもつという) が、

第 2 項は r に依存しない定数項、

第 3 項以降は 0 に収束する (第 2 項以下は特異性をもたない)

からき裂先端の十分近傍 (クラックの寸法 a に比べて r の十分小さい範囲) における応力成分は、式(2)の第 1 項のみによって表されることになる。

線形弾性論によれば、一般にき裂先端近傍の変形は、

モード (開口型)、モード (面内せん断型)、モード (面外せん断型)

とよばれる 3 つの独立な変形様式の和として与えられる (図 1)。

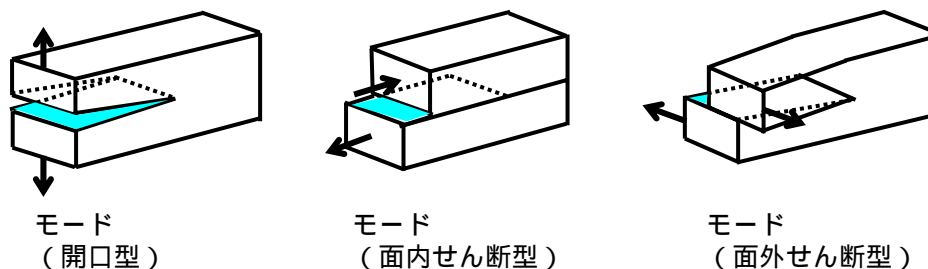


図 1 クラック先端近傍の 3 つの独立な変形様式

第1項の係数 A_i に $\sqrt{2\pi}$ を乗じた値を応力拡大係数 K と呼ぶ。すなわち、第1項で r および θ を含む適当な因子を除いた係数をいい、それぞれのモードに対して K_i ($i = I, II, III$) で表す。

変位は、応力に比例するひずみを座標に関して積分したものであるから、第1項が $r^{1/2}$ から始まる同様な級数で表されることになる。

クラック先端近傍の応力・変位場は、上記3つのモードの和で与えられ

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)\}, \quad (3)$$

$$u_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \{K_{Ia} f_{ij}^I(\theta) + K_{IIa} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{IIIa} f_{ij}^{III}(\theta)\} \quad (4)$$

の形になる。

応力拡大形数 K はき裂材の形状寸法、境界条件に依存して定まる係数で、これは $1/\sqrt{r}$ で表される特異性の大きさを表すものである。しかも、たとえ任意のき裂材に対して、その形状寸法、境界条件が異なっても、もし K の値が等しければき裂先端の十分近傍においてはその応力状態は等価であり、従って K はき裂先端近傍の応力状態を一義的に決定できるパラメータとして用いることができる。

異方性弾性体についても、応力拡大係数 $K_{Ia}, K_{IIa}, K_{IIIa}$ が定義でき、クラック先端の応力場は

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{K_{Ia} f_{ij}^I(\theta) + K_{IIa} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{IIIa} f_{ij}^{III}(\theta)\} \quad (5)$$

のように表示できる。

本研究で導かれる応力、変位の一般形は異方性部材も含めて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= A_i r^{\lambda-1} \cdot f(\lambda, \theta), \\ u_{ij}(r, \theta) &= A_i r^\lambda \cdot f(\lambda, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のように表される。

変位式は一般に、 $u = r^\lambda \cdot f(\lambda, \theta)$ であるので、

これより $\lambda < 0$ のとき $r \rightarrow 0$ とすると $u \rightarrow \infty$ となり、

$\lambda = 0$ のときは u は r に関与しなくなる。

また、応力式は $\sigma = r^{\lambda-1} \cdot f(\lambda, \theta)$ であるので $\lambda > 1$ のとき $r \rightarrow 0$ とすると $\sigma \rightarrow 0$ となる。

従って、特異解の範囲は $0 < \lambda < 1$ となる。

応力は $\sigma = r^{\lambda-1} \cdot f(\lambda, \theta)$ となって $r^{\lambda-1}$ に比例する。すなわち、応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} \propto r^{\lambda-1} = r^{-p} \quad (7)$$

となる。ここで、 p は特異性の指数であり

$$p = 1 - \lambda \quad (8)$$

である。すなわち、応力は $r^{\lambda-1}$ の大きさの特異性をもつことになる。ここで、 λ, p とも 0 から 1 の範囲を取り、 p が 1 に近いほど、言い換えれば λ が 0 に近いほど特異性が強いことになる。

境界条件より得られる特性行列式はその積分定数を未知係数にもつが、これらは一意に定めることはできない。従って、その中のどれかを基準として、他の係数を決定する。この基準となる係数は、 r および θ を含む適当な因子を除いた係数であり、今の場合これを応力拡大形数とみなせばよいことになる。

(参考文献、岡村弘之：線形破壊力学入門、培風館、1976)

(1997.12.10)