$\boxed{111}$ 次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $a_1=3, a_{n+1}=2a_n-n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$

$\boxed{\text{解答 1}}$

【方針】数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とし, じゃまな 1 次の項を消す.

$n \geqq 2$ のとき, $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ で a_nを求める.

$a_{n+1}=2a_n-n \quad \cdots$①

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする.

①より $a_{n+2}=2a_{n+1}-(n+1) \quad \cdots$②

② − ①から $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-1 \quad \therefore b_{n+1}=2b_n-1$

また,$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$ と変形できるから,

数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=(a_2-a_1)-1=\{(2a_1-1)-a_1\}-1=a_1-2=1$, 公比 2 の等比数列

よって,$b_n-1=1\cdot 2^{n-1}$ より $b_n=2^{n-1}+1$

$n \geqq 2$ のとき, $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k=3+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+(n-1)=2^{n-1}+n+1$

これは $n=1$ のときも成り立つ. 以上から,$a_n=2^{n-1}+n+1$ $\boxed{\text{答}}$

$\boxed{\text{解答 2}}$

【方針】数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ を利用するが,$n \geqq 2$ のとき, $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$は使わない.

$a_{n+1}=2a_n-n \quad \cdots$①

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする.

$b_n=a_{n+1}-a_n=(2a_n-n)-a_n=a_n-n \quad \cdots$③

$a_n=b_n+n \quad \cdots$④ また,$a_{n+1}=b_{n+1}+(n+1)$ であるから, ①に代入して

$b_{n+1}+(n+1)=2(b_n+n)-n \quad \therefore b_n=2b_n-1$

また,$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$ と変形できるから,

数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=(a_1-1)-1=1$, 公比 2 の等比数列

よって,$b_n=2^{n-1}+1$

④から $a_n=b_n+n=(2^{n-1}+1)+n=2^{n-1}+n+1$ $\boxed{\text{答}}$

　この解法は生徒の誤答の副産物と一致します.

生徒の誤答とは,

「$a_{n+1}=2a_n-n \quad \cdots$① の特性方程式が $x=2x-n$ で, 特性解が $x=n$ と勘違いし,

$b_n=a_n-n$ と置き換えると,$b_{n+1}=2b_n$ 変形できる.」

正しくは $b_n=2b_n-1$ です.

つまり, 直接 $b_n=a_n-n$ と置くと,$a_n=b_n+n, a_{n+1}=b_{n+1}+(n+1)$ であるから,

①に代入して $b_n=2b_n-1$ と変形でき,b_nが求まるとすぐ a_n も求まります.

$\boxed{\text{解答 3}}$

$a_{n+1}+p(n+1)+q=2(a_n+pn+q)$ を満たす p,q を求めると, $p=-1, q=-1$

数列 $\{a_n-n-1\}$ は初項 $a_1-1-1=1$, 公比 2 の等比数列である.

よって,$a_n-n-1=1\cdot 2^{n-1} \quad \therefore a_n=2^{n-1}+n+1$ $\boxed{\text{答}}$