

1 漸化式 $a_{n+1} = ra_n + f(n)$ の解法

先日行われた期末考査で出題された漸化式の問題の中で、

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + n$$

を解こうとしている子が何人かいました。

こんな問題を出したわけではありませんよ。

で、いつものように、 n が定数でないにもかかわらず、 $\alpha = 2\alpha + n$ から $\alpha = -n$ を求め、 $a_{n+1} + n = 2(a_n + n)$ と変形していました。

この間違いを解説する文書を作っていて気がついたのですが、次の解答はいかがでしょうか。

$$a_{n+1} + n = 2(a_n + n)$$

ここで、 $b_n = a_n + n$ とおくと

$$b_{n+1} - 1 = 2b_n$$

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

$$\therefore b_n + 1 = (b_1 + 1)2^{n-1}$$

$$= (a_1 + 2)2^{n-1}$$

$$= 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$$

一般には、 $a_{n+1} - g(n+1) = a_n - g(n)$ の形に変形することを考えるのですが、こう考えるのは、面倒でやりたく無いという気持ちが起こります。

1.1 何をしているのか

一般に

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = ra_n + f(n) \text{ ただし } r \neq 1$$

を考えてみましょう。

$$\alpha = r\alpha + f(n) \text{ から } \alpha = \frac{f(n)}{1-r}.$$

$$\text{よって、} a_{n+1} - \frac{f(n)}{1-r} = r \left(a_n - \frac{f(n)}{1-r} \right).$$

ここで、 $b_n = a_n - \frac{f(n)}{1-r}$ とおくと、

$$b_{n+1} + \frac{f(n+1)}{1-r} - \frac{f(n)}{1-r} = rb_n$$

$$b_{n+1} = rb_n + \frac{f(n+1) - f(n)}{r-1}$$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とおくと、 $d_{n+1} = rd_n + f(n+1) - f(n)$ となるが、これと同程度に有用で、たんなる置き換えで、 n の範囲にも制限が無いのがすばらしい。

知ってました？

2 2変数多項式の因数分解について

3年の演習でやっている問題集に、次の問いがあります。

$2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y + a$ が x, y の1次式の積に分解されるように、 a の値を求めよ。

普通、判別式を2度使うのですが、それよりは

$$\begin{aligned} 2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y + a &= (x+y)(2x-3y) + (-5x+10y) + a \\ &= \{(x+y) + A\}\{(2x-3y) + B\} \text{となればよい。} \end{aligned}$$

とやった方が断然速いですよね。しかしこれでは完全な解答ではないので、私は、記述では減点されると言ってきました。他の人はどうされてきましたか？

この因数分解の仕方も、無限遠点での因数分解という意味があってももしろいのですが、それはさておき、 $a = -3$ となるのですが、与式=0を $(x+y-3)(2x-3y+1) = c$ と変形したとき、 $c \neq 0$ なら題意を満たさないといえ、完全な解答になるでしょうか？

もっとも、一次変換が高校から消えてしまったので、説明が難しいかも知れませんが。

3 複素数平面でのある問題

α, β は0と異なる複素数とする ($\alpha \neq \beta$ とする)。複素数平面上で3点 O, α, β が正三角形を作るとき、 α, β の2次方程式が $\alpha^2 + a\alpha\beta + b\beta^2 = 0$ の係数 a, b の値を決定せよ。

この解答のあらすじを書きましょう。

$$\beta = \alpha\{\cos(\pm 60^\circ) + i\sin(\pm 60^\circ)\} \text{ から、} \frac{2\beta}{\alpha} - 1 = \pm\sqrt{3}i. \text{ 両辺を平方して整理すると、} \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0.$$

これから、 $a = -1, b = 1$

これっていいのでしょうか。

4 問題意識

先日シュプリングー数学クラブの「ガウスが切り開いた道」を読んでいて、3次方程式の解の公式、4次方程式の解の公式、正17角形の作図、5次方程式の解の公式の非存在を無性に講義したくなりました。

理数科の数学特論と言えばBASICなんてつまらないと思いませんか。

理数科だけでなく、できる子たちにこういうことを与えなければいけないような気がしているのですが... はじめすぎ？

5 おまけの話 1

Mathematica Ver 3.00 High School 版 UpGrade 決まる！

連絡あった？

6 おまけの話 2

まだ立ち上げていないのだけれど、Nifty-Serve のパーティオを作り、そこに、ソフトや T_EX のサンプルを置こうかと考えているのだけれど、使いたい人っているだろうか？

1997年7月28日 HGC00543 金沢光則