球の体積と表面積について

新潟県立阿賀黎明高等学校　西條和久

平成 14 年 11 月 29 日

1　はじめに

来年度より，新学習指導要領が実施され，いくつかの中学校の内容が高校へ移行する。そのうちの 1 つが数学 I で学ぶ「球の体積と表面積」である。新課程の教科書をいくつか見たが，その指導法は大きく分けて次の 3 通りがある。

1. カヴァリエリの原理で体積を求め，体積を既知として表面積を求める。（数研出版・旺文社など）
2. 区分求積法で体積を求め，体積を既知として表面積を求める。（啓林館など）
3. 表面積を先に提示し，それを既知として体積を求める。（東京書籍など）

ここでは，上記の 3 つの方法を紹介するとともに，体積を求める上での基本となる

$$(\text{三角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

の理由についても触れる。また，微積分を用いた求め方も紹介することにする。

2　カヴァリエリの原理

一般に，2 つの立体において,「1 つの平面に平行な平面による切り口の面積がつねに等しいとき，2 つの立体の体積は等しい」ことが知られている。これを**カヴァリエリの原理**という。この性質を利用すると，球の体積は次のように求められる。

半径 r の半球と，半径と高さが r の円柱から半径と高さが r の円錐をくり抜いたすり鉢型の図形（以下「すり鉢」という）を考える。半球は赤道面を水平面上におき，すり鉢はくり抜いた面が上になるように水平面上におく。水平面から高さ x にある平面で半球とすり鉢を切った切り口の面積を考える。半球の切り口は，半径 $\sqrt{r^2 - x^2}$ の円だから，面積は $\pi(\sqrt{r^2 - x^2}\,)^2 = \pi(r^2 - x^2)$ である。また，すり鉢の切り口は，半径 r の円から半径 x の円を取り除いたものだから，$\pi r^2 - \pi x^2 = \pi(r^2 - x^2)$ である。よって，切り口の平面の高さ x に関係なく切り口の面積は等しい。したがって，カヴァリエリの原理より，半球とすり鉢の体積は等しい。ここですり鉢の体積は，円柱の体積から円錐の体積を引けばよいから，

$$\pi r^2 \times r - \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

である。よって，球の体積 V は，半球の体積の 2 倍，すなわちすり鉢の体積の 2 倍であるから，

$$V = 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

となる。

また，カヴァリエリの原理は，面積にも適用できる。具体的には，

$$(\text{平行四辺形の面積}) = (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

が，まさにそれである。小学校の教科書には「等積変形して長方形になる平行四辺形」についてのみ，理由が書かれている。カヴァリエリの原理を使うと，一般の平行四辺形でも成り立つことは明らかである。

3　球の体積と表面積との関係

球の表面を細かく分け，1 つの面を底面とし，球の中心を頂点とする角錐状の立体を考える。球の表面の分割を非常に多くすることにより，球の体積 V は，次のように考えられる。

$$\begin{aligned} V &= \text{角錐の体積の総和} \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{角錐の底面積の総和}) \times (\text{角錐の高さ}) \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{球の表面積}) \times (\text{球の半径}) \\ &= \frac{1}{3} Sr \end{aligned}$$

ここで，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを使うと，$S = 4\pi r^2$ が得られる。

4　区分求積法

半球を等間隔にスライスし，それに内接する円柱と外接する円柱を考える。分割を細かくすることで，円柱の体積の和は，半球の体積に近づく。半径 1 の半球において，分割の数 n を 4，8，16，32 とした場合の体積は次のようになる。

n	4	8	16	32
内接	$\frac{17}{32}\pi \fallingdotseq 0.531\pi$	$\frac{77}{128}\pi \fallingdotseq 0.602\pi$	$\frac{325}{512}\pi \fallingdotseq 0.635\pi$	$\frac{1333}{2048}\pi \fallingdotseq 0.651\pi$
外接	$\frac{25}{32}\pi \fallingdotseq 0.781\pi$	$\frac{93}{128}\pi \fallingdotseq 0.727\pi$	$\frac{357}{512}\pi \fallingdotseq 0.697\pi$	$\frac{1397}{2048}\pi \fallingdotseq 0.682\pi$

このように，内接する円柱の体積の値は増加しながら，外接する円柱の体積の値は減少しながら，半球の体積の値 $\dfrac{2}{3}\pi$ に近づいていく。

5　表面積

表面積を求める方法として，次の方法がよく知られている。

> 半径 r の球にひもを巻き付けて，それを平面上で巻き直すと，半径が $2r$ の渦巻きになる。ひもの占める面積は球の表面積に等しいから，球の表面積は $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ である。

しかし，東京書籍の「新編数学 I」にはこの方法ではなく，次のように記述されている。

> 半径 r の球と，底面の半径が r で高さが $2r$ の円柱を考える。古代ギリシャの数学者アルキメデスは，この球の表面積が円柱の側面積 $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$ と等しいことに気づき，球の表面積を求める公式を発見した。
>
> 半径 r の球の表面積 S は，$S = 4\pi r^2$

なお，表面積と体積の関係は前述のとおりである。

6 三角錐の体積

底面が多角形の角錐はいくつかの三角錐に分割することができる。また，円錐は正多角錐の極限と見なすことができるから，三角錐の体積の求め方が，多角錐や円錐の体積の求め方の基本となる。よく知られているように，

$$(\text{三角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

である。さて，これを示すには，三角柱を，底面積と高さの等しい 3 つの三角錐に分割できればよい。実際，三角柱を 3 つの三角錐 A，B，C に分割し，A と B の底面積と高さは三角柱と等しく，かつ，B と C も底面積と高さが等しくなるようにすることができる。（ただし，A と B の等しい底面と B と C の等しい底面は異なる。）

また，特殊なケースであるが，次の事実も理解を助けるものと思われる。

> 底面が長さ a の正方形で高さが $\frac{a}{2}$ の四角錐を 6 つ用意し，頂点をくっつけるようにして 1 辺が a の正六面体を作る。正六面体の中心を通り，底面に水平な平面で切って半分にすると，四角錐はその中に 3 個分入っていることになる。すなわち，四角錐と同じ底面と高さの四角柱の中に四角錐が 3 個分あるのだから，四角錐の体積は四角柱の $\frac{1}{3}$ である。

7 微積分を用いた求め方

半径 r の球の中心を原点として，x 軸を定める。座標が x である点を通るように軸に対して垂直な平面で球を切る。その切り口は半径 $\sqrt{r^2 - x^2}$ の円だから，その面積を $S(x)$ とおくと，$S(x) = \pi(r^2 - x^2)$ である。よって，球の体積 V は次のように求まる。

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} S(x)dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^r \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

さらに，上で求めた体積の式を既知とし，体積と表面積の関係を用いて表面積が求まる。半径 r の球の表面積を $S(r)$ とおく。体積の増分 dV と，半径の増分 dr には次の関係がある。

$$dV = S(r)dr$$

よって，

$$S(r) = \frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2$$

また，体積と無関係に表面積を単独で求めるには，次のようにすればよい。半径 r の球の中心を原点として，x 軸を定める。原点を中心とし，x 軸に対して角度 θ のところで，角度の増分 $d\theta$ に対応する輪切り状の表面積の増分 dS を考える。輪切りの幅は $rd\theta$ で，半径は $r\sin\theta$ より，dS と $d\theta$ との関係は次のようになる。

$$dS = 2\pi(r\sin\theta)rd\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$$

よって，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

8　大学入試問題より

2002 年の慶応義塾大学理工学部の入学試験で，球の表面積を円錐で近似して求めるというおもしろい問題が出題されたので，紹介する。

> 球面を輪切りにし，それぞれの部分を円錐の側面の一部分で近似することによって，球の表面積を求めることを考える。
>
> (1) 半径 r (>0) の半円 $S : y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と直線 $L_s : y = s$ $(0 < s < r)$ は 2 つの交点をもつ。それぞれの交点における半円 S の 2 本の接線は点 $(0, \boxed{})$ で交わる。この 2 本の接線と直線 L_s で囲まれた三角形を y 軸のまわりに 1 回転してできる円錐の側面積は $\boxed{}$ である。さらに，この円錐から平面 $y = t$ $(0 < s < t \leqq r)$ より上にある部分を取り除いた立体図形の側面積は $\pi r(t-s) \times \boxed{}$ である。
>
> (2)n を自然数とし，$k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ とする。(1) で定義された立体図形で，$s = \dfrac{k}{n}r$，$t = \dfrac{k+1}{n}r$ のときの側面積を A_k と表すと，$A_k = \dfrac{2\pi r^2}{n} - \dfrac{\pi r^2}{n^2} \times \boxed{}$ となる。
>
> (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k = 2\pi r^2$ を証明し，それを $\boxed{}$ に書きなさい。

9　終わりに

球の体積や表面積は，微積分の知識がなければ厳密に求めることはできない。しかし，生徒の発達段階に応じて，生徒を納得させることのできる指導法を工夫する必要はあると思う。