ベクトルと内分点3

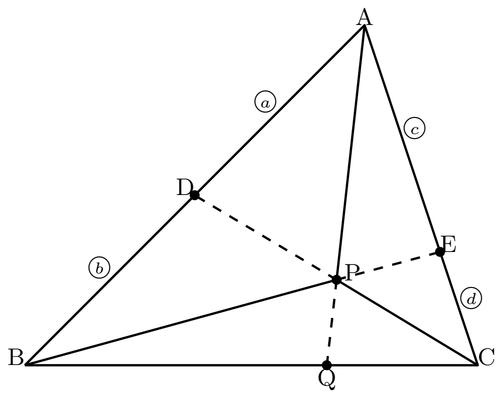
金沢光則

平成 15 年 12 月 6 日

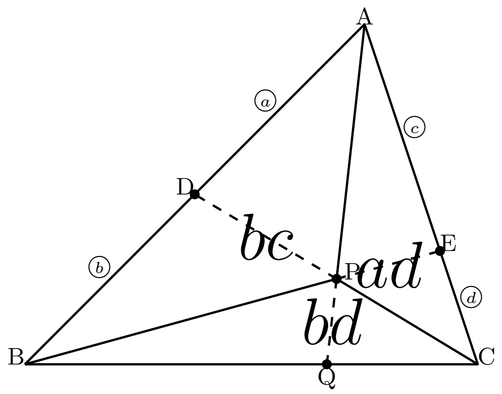
問題

$\triangle ABC$ の 2 辺 AB, AC をそれぞれ 1:1 , 2:1 に内分する点をそれぞれ D, E とし，直線 BE, CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。また，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。このとき，比 BQ : QC , AP : PQ の値を求めよ。

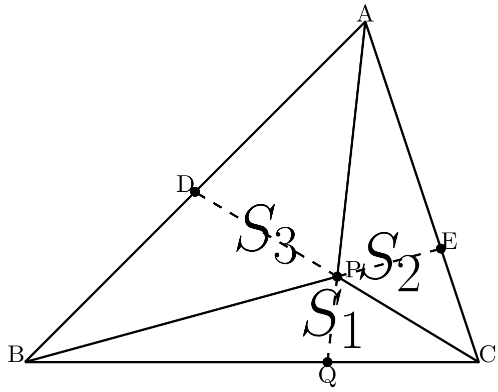
以前、この問題の解答方法を５つまとめた。
今回の定期テストに似た問題が出され、それを面積を使って計算しようとしている生徒がいた。「比を与えて面積比を求めさせる問題の逆を考えたのか」と眺めていたが、実は面積を経由して辺の比が有機的に繋がっていることに気づいた。



このとき、点 P と 3 頂点 A,B,C を結んだ線分で作られる三角形 $\triangle PBC$, $\triangle PCA$, $\triangle PAB$ の比は $bd : ad : bc$ となる。



これから、$BQ : QC = bc : ad$, $AP : PQ = (ad + bc) : bd$

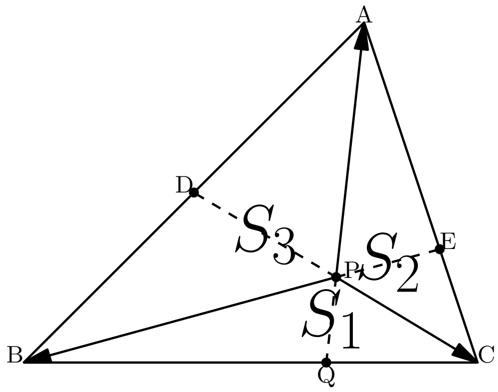


上図において、$BQ : QC = S_3 : S_2$, $AP : PQ = (S_2 + S_3) : S_1$ が成り立つことが基本である。
辺の比は、面積比を通して他の辺の比に結びついていくのである。
上図でチェバとメネラウスを確認してみよう。

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{S_2}{S_1} = 1$$

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AC}{CE} \cdot \frac{EP}{PB} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_1 + S_3}{S_1} \cdot \frac{S_2}{S_1 + S_3} = 1$$

これだけのことだから、チェバとメネラウスをありがたがる理由はない。



上図において、

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3}\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{S_2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + S_3\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{S_3 + S_2}$$

よって、$S_1\overrightarrow{\mathrm{PA}} + S_2\overrightarrow{\mathrm{PB}} + S_3\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$
逆に、この式によって P の位置は決まるから、
$a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$ のとき、$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = a : b : c$ となる。
そういえば、この形の式から決まる点 P の位置を求めるのに、昔は、P を基準にして計算していたことも多かったが、最近はさっぱりしていなかったなあ。
入試問題でもたまに見るように、実はこの結果は、四面体に対しても成立する。
四面体 ABCD の内部に点 P を取り、AP と面 BCD の交点を Q とすると、
$\triangle QBC : \triangle QCD : \triangle QDB =$ 四面体 $PABC :$ 四面体 $PACD :$ 四面体 $PADB$
であり、$a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} + d\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \overrightarrow{0} \iff a : b : c : d =$ 四面体 $PBCD :$ 四面体 $PACD :$ 四面体 $PABD :$ 四面体 $PABC$ である。
次元が上がっても成り立つように思うが、さてどうやったら $\cdots$