ベクトルと内分点2

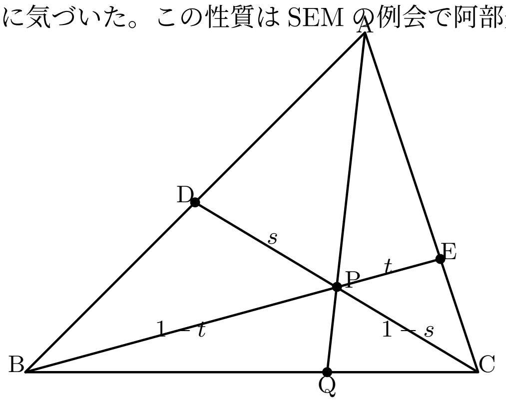
金沢光則

平成 15 年 11 月 13 日

問題

$\triangle ABC$ の 2 辺 AB, AC をそれぞれ 1:1 , 2:1 に内分する点をそれぞれ D, E とし，直線 BE, CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。また，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。このとき，比 BQ : QC , AP : PQ の値を求めよ。

以前、この問題の解答方法を５つまとめた。その中の２つ目の方法の最後が少しわかりにくかったが、次の性質を使えば簡単であることに気づいた。この性質は SEM の例会で阿部先生から聞いた話である。

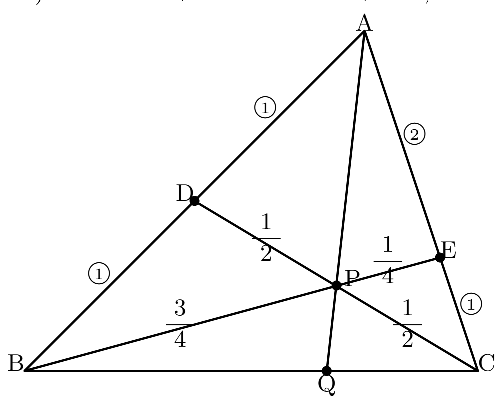


上図で、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つ。$1:1-t$ などとする方法の計算を注意深く眺めていればわかるのだが、ここでは次のように証明する。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=*\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とみると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$が一次独立ゆえ $y=s$ がわかる。

同様に、

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+*\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とみると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$が一次独立ゆえ $x=t$ がわかる。



$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2+1}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{BD}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2}$ よって，DP : PC = 1 : 1, BP : PE = 3 : 1

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$