ベクトルと内分点

金沢光則

平成 14 年 7 月 13 日

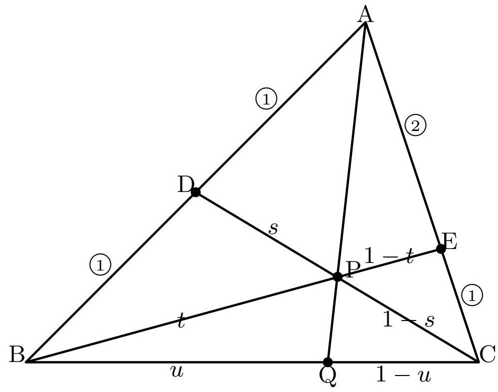
問題

$\triangle ABC$ の 2 辺 AB, AC をそれぞれ 1:1 , 2:1 に内分する点をそれぞれ D, E とし，直線 BE, CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。また，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。このとき，比 BQ : QC , AP : PQ の値を求めよ。

よくある問題であるが，教科書にある $t:1-t$ とおくやり方しか知らない生徒が多いのでまとめてみた。ここでは次の５つの方法で解く。

(1) $t:1-t$ とおく。
(2) ベクトル方程式の性質 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されているとき，点 P が直線 BC 上にある $\iff p+q=1$ を使う。
(3) 斜行座標系をつかう。具体的には $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。
(4) おなじみ平面幾何の定理「チェバの定理」「メネラウスの定理」を使う。
(5) 物理で考える。おもりの釣り合いで解く。

1　$t:1-t$ とおく方法



図のようにおくと，P が直線 BE 上にあることから，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
P が直線 CD 上にあることから，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-s)\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって，$(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-s)\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立だから $1-t=\dfrac{1-s}{2}$, $\dfrac{3t}{2}=s$

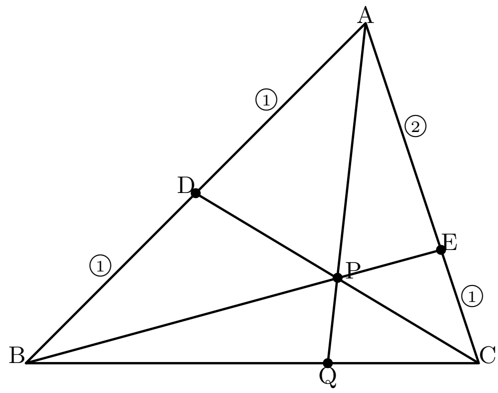
これを解いて，$s=\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{3}{4}$. よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Q が直線 BC 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は平行だから，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。

よって，$(1-u)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が一次独立ゆえ $1-u=\dfrac{k}{4}$, $u=\dfrac{k}{2}$

これを解いて $u=\dfrac{1}{3}$, $k=\dfrac{4}{3}$

よって，$AQ:QC=u:1-u=\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=2:1$, $AP:PQ=1:k-1=1:\dfrac{1}{3}=3:1$



2　ベクトル方程式

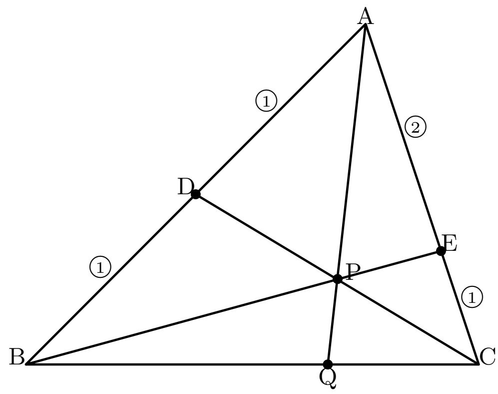
上の途中で，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ がでた。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$ と変形すれば，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$, $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=3:1$ であることがわかる。なぜなら，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$ とおけば，$AP /\!/ AR$ であり，R は 直線 BC 上にある。したがって R=Q だからである。このアイディアを最初から使っていこう。

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2+1}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{BD}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2}$ よって，$\mathrm{DP}:\mathrm{PC}=1:1$, $\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=3:1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

よって，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$, $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=3:1$



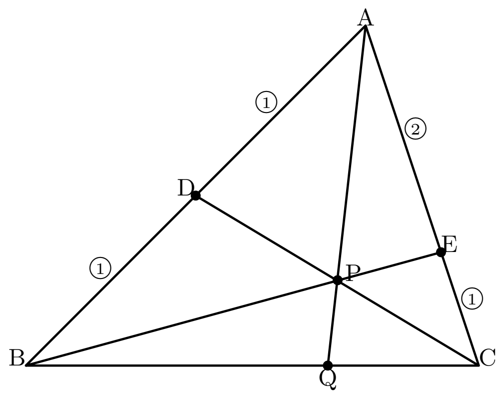
3　斜行座標

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が直交する単位ベクトルなら，x, y はこの２つのベクトルを基本ベクトルにもつ通常の直交座標である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ がそうでないとき，斜行座標系という。基本は前のベクトル方程式の性質である。
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x2\overrightarrow{\mathrm{AD}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

P は直線 BE, CD 上にあるから，$2x+y=1$, $x+\dfrac{3}{2}y=1$.

これを解くと，$x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{2}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}$ から $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$, $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=3:1$ とするのは前と同じである。



4　メネラウスの定理

チェバ，メネラウスの定理は，一筆書きのように続けて比をかけていくと１になるという定理である。証明は簡単なので，数学 A の平面幾何を見てください。
チェバの定理から，$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

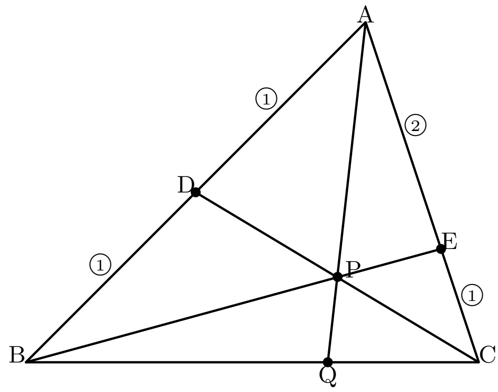
これから，$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{1}{2}=1$ よって，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$

メネラウスの定理から，$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BC}{CQ}\cdot\dfrac{QP}{PA}=1$

これから，$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{QP}{PA}=1$ よって，$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=3:1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3}{4}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}$

5　おもりの釣り合い



$\triangle ABC$ の頂点におもりをおいて，点 P で支える。直線 BE で支えると，A に 1 g，C に 2 g おけば釣り合う。このとき，直線 CD で支えると，B に 1 g おけば釣り合う。直線 AQ で支えると，B には 1 g，C には 2 g あって釣り合うので BQ : QC = 2 : 1. また AQ を天秤棒とし P で支えると，Q には 1+2g, A には 1 g あって釣り合うから AP : PQ = 1 : 3

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}$

言葉で書くと長くなるが，図に書き込んでいけば簡単にわかる。

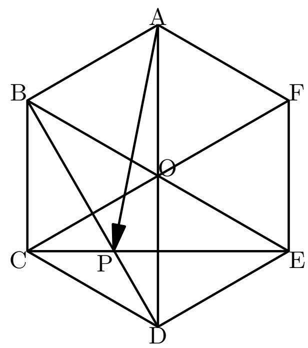
6　おすすめ

一次独立の概念はとても重要であるが，簡単に使うという点では，他のやり方の方が楽であることが多い。
２番目のやり方の元になる考え方は重要であるし，この方法を勧めたい。
物理が得意でセンターなど簡単に出したいなら，５番目のやり方もお勧めである。
よくメネラウスが簡単だという話があるが，複雑な状況で，使えるかどうかもはっきりしないとき，よく理解しないで使うのは間違いを起こしやすい。

7　おまけの問題

問題

正六角形 ABCDEF において，BD, CE の交点を P とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ で表せ。



$\triangle BPE$ と $\triangle DPC$ が相似であることを使えば簡単にわかるが，ここでは純粋にベクトルだけを使って解いてみよう。

P の位置を決める。P は BD と CE の交点だから，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を考えよう。

$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}}{3}$

よって CP : PE = 1 : 2

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{3} = \dfrac{2(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}})}{3} = \dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{3}$