ベクトル方程式

金沢光則

平成 13 年 10 月 13 日

問題

直線 $l : y = 2x + 1$ に関して円 $C_1 : (x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ と対称な円 C_2 の方程式を求めよ。さらに，これら 2 つの円に外接する半径 2 の円のうち，x 座標が正のものの方程式を求めよ。

この問題をベクトル方程式で解いて見せたところ，生徒が感心していたのでここにあげる。
きらいなベクトル，それもベクトル方程式をうまく使うと非常に簡単に解けるという話である。

[解答例]

$y = 2x + 1$ を標準形に変形すると $2x - y + 1 = 0$ ゆえ，法線ベクトルとして $(-2, 1)$ を考える。円 C_1, C_2 の中心を通る直線のベクトル方程式は

$$(x, y) = (4, -1) + t(-2, 1)$$

となる。この直線上の点 $(4 - 2t, -1 + t)$ が直線 l 上にあるとすると，

$$-1 + t = 2(4 - 2t) + 1$$

これを解いて，$t = 2$ となる。したがって，円 C_2 の中心は $t = 4$ のときゆえ (−4,3) となる。また，半径は 3 である。
次に求める円を C_3 とする。C_1, C_2 の中心の中点を M とすると M(0,1) である。C_3 と C_1 の中心間の距離は 5 であり，C_1 の中心と M との距離は $\sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ である。よって，C_3 の中心は M から (1,2) の方向へ $\sqrt{25-20} = \sqrt{5}$ だけ行ったところにあるから

$$(0, 1) + \sqrt{5} \cdot \frac{(1, 2)}{\sqrt{1+4}} = (0, 1) + (1, 2) = (1, 3)$$

よって，C_3 の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

[注意]

前半部分も，

$$(4, -1) + 2 \cdot \frac{|2 \cdot 4 - (-1) + 1|}{\sqrt{4+1}} \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{4+1}} = (-4, 3)$$

と計算することができる。