トレミーの定理

金沢光則

平成 21 年 8 月 4 日

1　はじめに

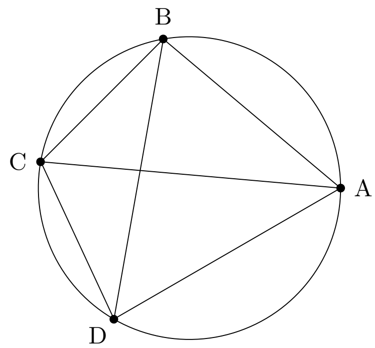
トレミーの定理

円に内接する四角形 ABCD に対して対角線の積は、向かい合う辺の積の和に等しい。

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

東北大学のオープンキャンパスからの帰り、同僚の石塚先生と昔証明した方法についての話になった。その証明が手元になかったので、改めて証明を書いてみた。

1.1　余弦定理



余弦定理だけで、簡単に出たよという。対角線の長さを求めてやればよいと言うので計算してみた。

1.1.1　計算例１

余弦定理から

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$$
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD \cdot \cos A$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cdot \cos B$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

これから、$\cos A, \cos B$ を消去して

$$\frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{BD^2 - BC^2 - CD^2}{2BC \cdot CD}$$
$$\frac{AC^2 - AD^2 - CD^2}{2AD \cdot CD} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$$

分母を払って、対角線の長さを求めると、

$$(AB \cdot AD + BC \cdot CD)BD^2 = BC \cdot CD(AB^2 + AD^2) + AB \cdot AD(BC^2 + CD^2)$$
$$(AB \cdot BC + AD \cdot CD)AC^2 = AD \cdot CD(AB^2 + BC^2) + AB \cdot BC(AD^2 + CD^2)$$

なるべく定理の形になるように、向かい合う辺の積の形を作るように右辺を変形すると、

$$
\begin{aligned}
&(AB \cdot AD + BC \cdot CD)BD^2 \\
&= BC \cdot CD(AB^2 + AD^2) + AB \cdot AD(BC^2 + CD^2) \\
&= AB \cdot CD \cdot AB \cdot BC + AD \cdot BC \cdot AD \cdot CD + BC \cdot AD \cdot BC \cdot AB + CD \cdot AB \cdot CD \cdot AD \\
&= AB \cdot CD(AB \cdot BC + AD \cdot CD) + (AD \cdot BC)(AD \cdot CD + AB \cdot BC) \\
&= (AB \cdot CD + AD \cdot BC)(AB \cdot BC + AD \cdot CD)
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&(AB \cdot BC + AD \cdot CD)AC^2 \\
&= AD \cdot CD(AB^2 + BC^2) + AB \cdot BC(AD^2 + CD^2) \\
&= AB \cdot CD \cdot AB \cdot AD + BC \cdot AD \cdot BC \cdot CD + AD \cdot BC \cdot AD \cdot AB + CD \cdot AB \cdot CD \cdot BC \\
&= AB \cdot CD(AB \cdot AD + BC \cdot CD) + BC \cdot AD(BC \cdot CD + AB \cdot AD) \\
&= (AB \cdot CD + BC \cdot AD)(AB \cdot AD + BC \cdot CD)
\end{aligned}
$$

これから

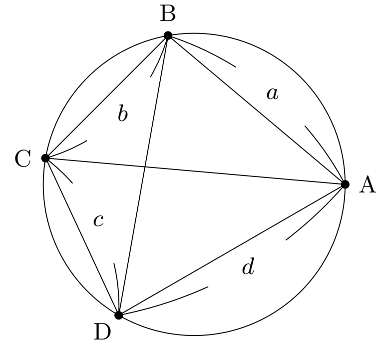
$$
\begin{aligned}
(AB \cdot AD + BC \cdot CD)BD^2 = (AB \cdot CD + AD \cdot BC)(AB \cdot BC + AD \cdot CD) \\
(AB \cdot BC + AD \cdot CD)AC^2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)(AB \cdot AD + BC \cdot CD)
\end{aligned}
$$

ゆえ

$$
\begin{aligned}
&BD^2 \cdot AC^2 \\
&= \frac{(AB \cdot CD + AD \cdot BC)(AB \cdot BC + AD \cdot CD)}{AB \cdot AD + BC \cdot CD} \frac{(AB \cdot CD + BC \cdot AD)(AB \cdot AD + BC \cdot CD)}{AB \cdot BC + AD \cdot CD} \\
&= (AB \cdot CD + AD \cdot BC)^2
\end{aligned}
$$

よって、

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$



1.1.2 図を使って

上の計算をやっている途中では、本当にこれでうまくいくのだろうかという感じがする。生徒が最後までやらない大きな理由はこれであろう。
よく気がついたねと聞くと、図からどういう状態になっているのか確認するとうまくいきそうなことがわかるというのでやってみた。

$$(ad + bc)BD^2 = (ac + bd)(ab + cd)$$

と この関係をいわば 90°回転させた関係

$$(ab + cd)AC^2 = (bd + ac)(bc + da)$$

から、余計な部分が消えてうまくいきそうだという感じがする。

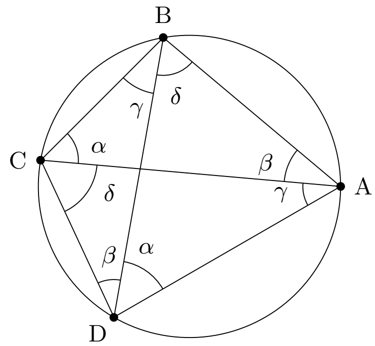
1.2　正弦定理

以下外接円の半径を 1 とする。
正弦定理から、

$$AB = 2\sin\angle\mathrm{ADB}, \qquad \cdots, \qquad AC = 2\sin\angle\mathrm{ABC}$$

などが成り立つ。
これらの関係式を使って計算してみよう。

1.2.1　第 1 余弦定理



第 1 余弦定理と正弦定理を使ってみた。辺と角を移動する感じで、
思いがけず簡単にできた。

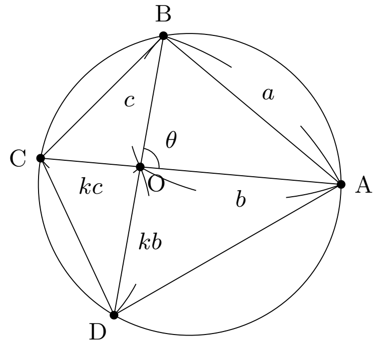
$$\begin{aligned}
AB\cdot CD + BC\cdot DA &= AB\cdot CD + BC\cdot 2\sin\delta \\
&= AB\cdot CD + 2BC\sin(B-\gamma) \\
&= AB\cdot CD + 2BC(\sin B\cos\gamma - \cos B\sin\gamma) \\
&= AB\cdot CD + BC\cdot AC\cos\gamma - BC\cdot CD\cos B \\
&= BC\cdot AC\cos\gamma + CD(AB - BC\cos B) \\
&= BC\cdot AC\cos\gamma + CD\cdot AC\cos\beta \\
&= AC(BC\cos\gamma + CD\cos\beta) \\
&= AC\cdot BD
\end{aligned}$$

1.2.2　正弦定理のみ

三角比だけで計算できないかやってみた。図は、上の例のものを使う。

$$\begin{aligned}
AB\cdot CD + BC\cdot DA &= 4\sin\alpha\sin\gamma + 4\sin\beta\sin\delta \\
&= 4\sin(D-\beta)\sin\gamma + 4\sin\beta\sin(B-\gamma) \\
&= 4(\sin D\cos\beta - \cos D\sin\beta)\sin\gamma + 4\sin\beta(\sin B\cos\gamma - \cos B\sin\gamma) \\
&= 4(\sin B\cos\beta + \cos B\sin\beta)\sin\gamma + 4\sin\beta(\sin B\cos\gamma - \cos B\sin\gamma) \\
&= 4\sin B\cos\beta\sin\gamma + 4\sin\beta\sin B\cos\gamma \\
&= 2AC(\sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta) \\
&= 2AC\sin A \\
&= AC\cdot BD
\end{aligned}$$

1.3　面積



余弦定理が面積と関係していた事に気づき、それを使って計算してみた。

対角線のなす角を θ とする。対角線の交点を O とする。全体の面積を S で表すと、

$$AC \cdot BD = \frac{2S}{\sin\theta}$$

また、$AB = a,\ AO = b,\ BO = c,$ 三角形 $\triangle$COD と三角形 $\triangle$AOB の比を k とする。$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ から

$$ka^2 = kb^2 + kc^2 - 2kbc \cdot \cos\theta$$

であるが、これから

$$AB \cdot CD = \frac{2\triangle\mathrm{OAD}}{\sin\theta} + \frac{2\triangle\mathrm{OBC}}{\sin\theta} - 2OA \cdot OC(= OD \cdot OB)\cos\theta$$

同様に

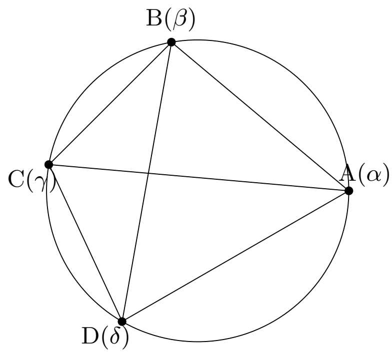
$$BC \cdot DA = \frac{2\triangle\mathrm{OAB}}{\sin\theta} + \frac{2\triangle\mathrm{OCD}}{\sin\theta} - 2OA \cdot OC\cos(\pi - \theta)$$

２つの式を辺々加えて

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

加法定理を必要としないのが特徴である。

1.4　複素数を使って



円周角が等しいことから

$$\arg\frac{\alpha-\beta}{\delta-\beta} = \arg\frac{\alpha-\gamma}{\delta-\gamma}$$

$$\therefore \frac{\alpha-\beta}{\delta-\beta} \cdot \frac{\delta-\gamma}{\alpha-\gamma} \in \mathbb{R}_+$$

$$\therefore \frac{|\alpha-\beta|}{|\delta-\beta|} \cdot \frac{|\delta-\gamma|}{|\alpha-\gamma|} = \frac{\alpha-\beta}{\delta-\beta} \cdot \frac{\delta-\gamma}{\alpha-\gamma}$$

同様に、

$$\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta} \cdot \frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma} \in \mathbb{R}_+$$

$$\frac{|\gamma-\beta|}{|\delta-\beta|} \cdot \frac{|\alpha-\delta|}{|\alpha-\gamma|} = \frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta} \cdot \frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\delta-\beta} \cdot \frac{\delta-\gamma}{\alpha-\gamma} + \frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta} \cdot \frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma} \in \mathbb{R}_+$$

左辺の分子を計算すると、

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\gamma-\beta)(\alpha-\delta)\\
&=\alpha\delta-\alpha\gamma-\beta\delta+\beta\gamma+\alpha\gamma-\gamma\delta-\alpha\beta+\beta\delta\\
&=\alpha(\delta-\beta)+\gamma(\beta-\delta)\\
&=(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\frac{|\alpha-\beta|}{|\delta-\beta|}\cdot\frac{|\delta-\gamma|}{|\alpha-\gamma|}+\frac{|\gamma-\beta|}{|\delta-\beta|}\cdot\frac{|\alpha-\delta|}{|\alpha-\gamma|}\\
&=\frac{\alpha-\beta}{\delta-\beta}\cdot\frac{\delta-\gamma}{\alpha-\gamma}+\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta}\cdot\frac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma}\\
&=1
\end{aligned}
$$

から

$$|\alpha-\beta||\delta-\gamma|+|\gamma-\beta||\alpha-\delta|=|\delta-\beta||\alpha-\gamma|$$

ゆえ

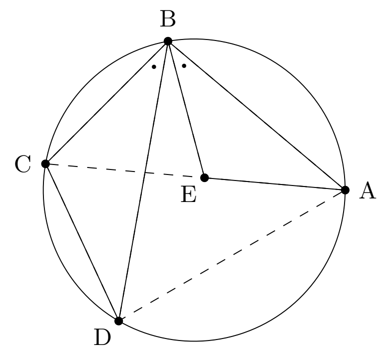
$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=BD\cdot AC$$

が成り立つ。

1.5 相似を使って

補助線を 1 本引き相似であることをみて計算するだけであるが、なかなか気づかなかった。教えてもらってやっとわかった。
ここでは単純に証明を与えるのではなく、最終の式から逆に見ていく。そうすることで、必要なときに証明が思い出せるのではないかと期待している。

1.5.1 式の変形と意味



$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$ が目標とする式である。
和を線分の長さの和と考えると、対角線 AC 上に点 E をとり、

$$AC=\frac{AB\cdot CD}{BD}+\frac{BC\cdot AD}{BD}$$

の右辺が AE + EC の形になると考えて良いだろう。そこで、

$$AE=\frac{AB\cdot CD}{BD},\qquad EC=\frac{BC\cdot AD}{BD}$$

とし、三角形の相似から作られる比の形を考えてみると、次の比しかあり得ないことがわかる。

$$\frac{AE}{AB}=\frac{CD}{BD},\qquad \frac{EC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

この 2 つの関係式を満たすように点 E をとることができれば良い。 △ABEと △DBC, △CBEと △DBA がそれぞれ相似とならなければならないが、対応する角を考え、

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{DBC}$$

とすれば実際に成り立つ。

2　最後に

まれにセンター試験やその演習で、トレミーの定理を使うと簡単にわかるということがある。今回生徒にトレミーの定理を紹介したら、証明を教えろと言う。
証明ができなければ使いたくないのだそうだ。それはすばらしいのだが、このトレミーの定理の証明は、はいはいといつでも教えられるものではなかった。
今回いろいろな証明をあげた結果、生徒に聞かれてもすぐに答えられるようになったのではないかと思う。