接線とその周辺

金沢光則

平成 11 年 7 月 10 日

1　はじめに

元々は、１９９９年大学入試懇談会で京都大学の岩井齊良先生がいったことに始まる。それは「$y = x^3 - x$ の外部の点Ｐから３本の接線が引けるような点Ｐの範囲は、接線の方程式を計算しなくても簡単に知る方法がある」という主張である。

この主張は、曲線上に接点から伸びる半直線を考え、その接点を動かして平面を何回スイープするか数えればよいというものであった。

簡単な曲線の場合は確かにそうだが、複雑な場合も明らかにいえるのだろうか等と思い、接線について少し考えてみた。が、話が発散してしまったことをまずお詫びしたい。

1.1　元の問題

曲線 $C : y = x^3 - x$ 上の点 (p, q) における接線は、

$$y = (3p^2 - 1)x - 2p^3$$

これが点 (a, b) を通るとすると、

$$2p^3 - 3ap^2 + a + b = 0$$

これを p の３次方程式と見て３つの実数解をもつ a, b の条件を求めると、

$$a < 0 \text{ のとき } a^3 < a + b < 0 \qquad 0 < a \text{ のとき } 0 < a + b < a^3$$

これは、曲線と変曲点における接線でわけられた領域を表している。
この計算は実数で行ったが、複素数では３本引けない部分は領域にならず、次元が下がる。上の例では、変曲点における接線と曲線上で２本になり、それ以外では３本の接線が引ける。

$$\begin{cases} y &= x^3 - x \\ y &= t(x - a) + b \end{cases}$$

とおいて、y を消去すると

$$x^3 - x = t(x - a) + b$$

が重解を持つ条件になる。
一般に次が成り立つ。

$$f(x) = 0 \text{ が重解を持つ } \iff \begin{cases} f(x) &= 0 \\ f'(x) &= 0 \end{cases} \text{ が共通解を持つ}$$

$$\begin{cases} p(x) &= 0 \\ q(x) &= 0 \end{cases} \text{が共通解を持つ} \iff p, q \text{ の終結式 } R(p,q) = 0$$

この方針で計算すると、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1-t & at-b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-t & at-b \\ 3 & 0 & -1-t & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = -4 + 27a^2t^2 - 54abt + 27b^2 - 12t - 12t^2 - 4t^3 = 0$$

これは t の 3 次方程式だから、一般の (a,b) に対して解は 3 つ存在し、接線が 3 本引けることがわかる。傾きを変数としているので複接線の存在は問題にならない。
また

$$2p^3 - 3ap^2 + a + b = 0$$

において $t = 3p^2 - 1$ とおいて整理するとこの式と一致する。
さらにこの式の t に関して重解を持つ条件を作ると、係数を無視すれば

$$(a^3 - a - b)(a+b)^3 = 0$$

これは、境界として現れる、変曲点における接線と、曲線そのものである。

1.2 終結式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

とおくとき、

$$R(p,q) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

を終結式という。

$p(x)=0,\ q(x)=0$ が共通解 α を持てば、

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{n+m-1} \\ \alpha^{n+m-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{m-1}\cdot p(\alpha) \\ \alpha^{m-2}\cdot p(\alpha) \\ \vdots \\ \alpha^0\cdot p(\alpha) \\ \alpha^{n-1}\cdot q(\alpha) \\ \vdots \\ \alpha^0\cdot q(\alpha) \end{pmatrix} = O$$

ゆえ、$R(p,q)=0$ となる。
逆に、

$$p(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) \qquad q(x)=b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$$

とおくとき、

$$R(p,q)=a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$$

ゆえ、$p(x)=0,\ q(x)=0$ は共通解を持つ。

1.3 $R(p,q)=a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$ の証明

$$p(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) \qquad q(x)=b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$$

とすると、$R(p,q)$ は $a_n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n,\ b_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m$ の多項式になる。

$$\alpha_i=\beta_j \Rightarrow R(p,q)=0$$

ゆえ、

$$R(p,q) \text{ は } (\alpha_i-\beta_j)\forall i,j \text{ を因数に持つ}$$

よって、

$$R(p,q)=A\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$$

と表せる。

$$R(p,q)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

のどの行 (a_i に関する 1 行から m 行まで) の成分をとってもどの α_k についても 1 次式ゆえ、$R(p,q)$ は α_k ($\forall k$) についての高々m 次式。β についても同様ゆえ、A は定数である。
$\forall \alpha_j = 0$ とすると

$$R(p,q) = \begin{vmatrix} a_n & 0 & \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & 0 & \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \quad \cdots & 0 \\ 0 & b_m & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \quad \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & b_0 \end{vmatrix} = (a_n)^m (b_0)^n$$

$$b_0 = b_m \prod_{j=1}^{m} (-\beta_j)$$

ゆえ

$$R(p,q) = (a_n)^m (b_m)^n \prod_{j=1}^{m} (-\beta_j)^n = A \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (0 - \beta_j) \qquad \therefore A = a_n^m b_n^m$$

1.4 判別式

次は、Mathematica による計算である。これからわかるように、$R(f, f')$ は符号を無視すれば、$f = 0$ の判別式を与える。

```
In[1]:=f[x_]:=(x-a1)(x-a2)(x-a3)(x-a4)(x-a5)(x-a6)(x-a7)(x-a8)
Factor[Resultant[f[x],D[f[x],x],x]]

Out[1]:=(a1 - a2)^2(a1 - a3)^2(a2 - a3)^2(a1 - a4)^2
     (a2 - a4)^2(a3 - a4)^2(a1 - a5)^2(a2 - a5)^2
     (a3 - a5)^2(a4 - a5)^2(a1 - a6)^2(a2 - a6)^2
     (a3 - a6)^2(a4 - a6)^2(a5 - a6)^2(a1 - a7)^2
     (a2 - a7)^2(a3 - a7)^2(a4 - a7)^2(a5 - a7)^2
     (a6 - a7)^2(a1 - a8)^2(a2 - a8)^2(a3 - a8)^2
     (a4 - a8)^2(a5 - a8)^2(a6 - a8)^2(a7 - a8)^2
```

2 双対曲線

$\mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ において定数倍を同一視した空間を $P^2(\mathbb{C})$ で表し、複素射影平面という。
P^2 は $\mathbb{C}^2$ に無限遠直線をつけた平面を表し、その点は $(a:b:c)$ と比で表す。通常の平面 $\mathbb{C}^2$ 上の点 (a,b) は P^2 上の点 $(a:b:1)$ に対応し、この時、無限遠直線上の点は $(a:b:0)$ と表される。
$y = x^2$ は、P^2 上の変数 $(X:Y:Z)$ について、$x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$ とおいたときの関係式と考えられるので、$\dfrac{Y}{Z} = \left(\dfrac{X}{Z}\right)^2$ となる。分母を払って、$X^2 - YZ = 0$ となる。一般に平面曲線は射影平面では斉次式で表される。

Z で割れば、２次関数のグラフとなったが、X で割るつまり $X=0$ を無限遠直線と考えれば、$yz=1$ という双曲線になる。これらは同じ対象を表している。

2.1　平面曲線の接線

$C:F(X,Y,Z)=0$ 上の点 $p(a:b:1)$ における接線の方程式は

$$\partial_X F(p)X+\partial_Y F(p)Y+\partial_Z F(p)Z=0$$

である。

2.1.1　証明

$$f(x,y)=F(x,y,1)=\frac{F(X,Y,Z)}{Z^n} \qquad (n=\deg f)$$

とおく。$C:f(x,y)=0$ の点 p(a,b) における接線は、

$$y-b=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)$$

これから、

$$f_x(a,b)x+f_y(a,b)y=af_x(a,b)+bf_y(a,b)$$

ここで、

$$\partial_X F=\frac{\partial}{\partial X}Z^n f\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)=Z^n f_x(x,y)\frac{1}{Z}$$
$$\therefore \partial_X F(p)=f_x(a,b)$$

同様に $\partial_Y F(p)=f_y(a,b)$ が成り立つ。また、

$$\partial_Z F=\frac{\partial}{\partial Z}Z^n f\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)=nZ^{n-1}f(x,y)-Z^n f_x(x,y)\frac{X}{Z^2}-Z^n f_y(x,y)\frac{Y}{Z^2}$$
$$\therefore \partial_Z F(p)=-af_x(a,b)-bf_y(a,b)$$

これから、

$$\partial_X F(p)\frac{X}{Z}+\partial_Y F(p)\frac{Y}{Z}=-\partial_Z F(p)$$

分母を払えば良い。
このことから、$p\in V(C)$ に対して、

$$p\in Sing(C) \iff (\partial_X F(p),\partial_Y F(p),\partial_Z F(p))=(0,0,0)$$

2.2　双対曲線

P^2 の点 $(a:b:c)$ と P^2 の直線 $aX+bY+cZ=0$ は１対１に対応する。曲線 C 上の点に対してその点における接線に対応する点を対応させれば、C をパラメータとして曲線が定まる。それを双対曲線と呼ぶ。

$C : F(X,Y,Z)=0$ の双対曲線は

$$\{(\partial_X F(p) : \partial_Y F(p) : \partial_Z F(p))\}_{p\in C}$$

と表される。
$f(x,y)=0$ の双対曲線は、$F(X,Y,Z)=Z^n f\left(\dfrac{X}{Z},\dfrac{Y}{Z}\right)$ とおくとき

$$\begin{aligned}
& (u,v,1) \\
= \ & (\partial_X F(p) : \partial_Y F(p) : \partial_Z F(p)) \\
= \ & (f_x(x,y) : f_y(x,y) : -xf_x(x,y)-yf_y(x,y)) \\
= \ & \left(-\frac{f_x(x,y)}{\Delta f(x,y)} : -\frac{f_y(x,y)}{\Delta f(x,y)} : 1\right)
\end{aligned}$$

ただし、$\Delta f(x,y)=xf_x(x,y)+yf_y(x,y)$
よって、

$$\begin{cases}
u & = -\dfrac{f_x(x,y)}{\Delta f(x,y)} \\
v & = -\dfrac{f_y(x,y)}{\Delta f(x,y)} \\
f(x,y) & = 0
\end{cases}$$

これから (x,y) を消去すれば (u,v) がでてくる。
これは計算が大変であり、実はもっと易しい計算方法がある。
$f(x,y)=0$ かつ 点 $(0,b)$ から接線 $y+b=-tx$ を引く。y を消去した式 $f(x,-tx-b)=0$ が重解を持つような t, b の関係は、$F(x)=f(x,-tx-b)=0$ とおくとき、$R(F,F')=0$ で与えられる。
接線の方程式が $tx+y+b=0$ となるから、双対空間では点 $(t:1:b)$ を表し、したがって双対曲線を表す。

3　２次式の因数分解

$x^2+kxy-2y^2+3y-1=0$ が 2 直線を表すような k を求めたい。
$x^2+xy-2y^2+3y-1=c$ が 2 直線を表すような c を求めることは簡単にでき、それしかないことは (1 次式)(1 次式) $=c$ として座標変換を考えることで説明することができる。
しかし、この方法では上の問題はうまくいかない。
もちろん 2 次曲線の一般論から

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

を解けば $k=\pm 1$ がわかる。

3.1　Some Remarks

x 切片と y 切片がそれぞれ 2 点ずつある。原点は通らないからもし 2 直線に分解されるならその直線は決まってしまう。このことから k の値が決まる。
P^2 で考えると、

$$X^2+kXY-2Y^2+3YZ-Z^2=0$$

となる。$Y=0$ を無限遠直線と考えると、

$$x^2+kx-2+3z-z^2=0$$

これは平行移動によって

$$x^2-a-z^2+3z-2=0$$

と変形できる。このことから、２次曲線の係数の１つが文字になった場合は、どこがそうなっても、すべて同じに扱うことができる。
もし２直線に分解できるなら、その交点は特異点となる。この観点から

$$F=\partial_X=\partial_Y=\partial_Z=0$$

を解くと、$k=\pm 1$ となる。

3.2 判別式が平方となること

この問題を高校の範囲で、通常の方法で解くと、判別式を２度取り、２回目の判別式が平方式であることを使う。
今まで見てきた方法では、直線に分解される結果の一部の性質を使ってはいるが、“直線” であることを使っているようには見えない。
$x=ty+v$ とおいて x を消去した式

$$(ty+v)^2+k(ty+v)y-2y^2+3y-1=0$$

を考える。接するためには判別式が 0 とならねばならないから、

$$(k^2+8)v^2+12tv+4t^2+6kv+4kt+1=0$$

$k=\pm 1$ ならこの式は

$$(3v+2t\pm 1)^2=0$$

となる。直線の双対曲線は点になるので存在しないが、２直線に分解できるということが、双対曲線が doubleline になるということに対応しているのだろうか。高校の方法は、これに関連があるのだろうか。

参考文献

[1] 飯高茂、上野健爾、浪川幸彦著、『デカルトの精神と代数幾何』（日本評論社、１９９３年）

[2] Hisao Yosihara, Discriminants and their applications to curve theory

[3] 伊里正夫、岩波講座　応用数学『線形代数　』（岩波書店、１９９４年）