1998/05/05 金沢光則

1　曲線へ接線を２本引く問題

問題集に、次の問題がある。

> 曲線 $y = xe^x$ へ点 $(a, 0)$ から接線が２本引けるような a の値の範囲を求めよ。

似たような問題で、３次関数のグラフを使ったものもある。４次関数を使わないのは、複接線が存在する場合があるからであるが、この問題では複接線の存在はどうなるのだろう。
ちなみに、元の問題では、複接線は存在しないという条件が付いていた。
実は次の主張が成り立つ。

> $f(x)$ が C^2クラス（２階導関数が存在して、さらに連続である。）で、直線である区間を持たないとする。このとき、変曲点が１つしかないなら、複接線は存在しない。

1.1　証明

複接線が存在するとする。２接点を $(a, f(a))$,$(b, f(b))$ $(a < b)$ とする。C^2クラスゆえ、$c(a < c < b)$ が存在し、$f'(a) = f'(c) = f'(b)$ となる。$f'(x)$ は定数でなく、$f''(x)$ が存在して連続ゆえ、α,β $(a < \alpha < c < \beta < b)$ が存在して、$f''(\alpha) = f''(\beta) = 0$, $f'(\alpha)$ は $x = \alpha$の近くで最大または最小。$f'(\beta)$ も $x = \beta$の近くで最大または最小。ただし後半の条件は、平均値の定理の証明における平均変化率と同じ傾きを与える点の作り方による。従って、$f''(x)$ は $x = \alpha, \beta$ の前後で符号を変えるから２点 $(\alpha, f(\alpha))$,$(\beta, f(\beta))$ を変曲点に持つ。

1.2　逆は成り立たない

$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$は変曲点を２つ持つが、複接線を持つことはない。無限遠点で複接線を持つことが問題だというなら、$y = \log\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)$はどうだろうか。