線対称の一次変換

金沢光則

平成 21 年 7 月 16 日

1　はじめに

今回の数学 C の問題に $y = 3x$ に関する対象変換を表す行列を求めよという問題があった。答案を返しながら、質問はないかと聞くと、この問題がわからないという。
そこで、始めは (1,0) と (0,1) の像を調べるやり方で計算を始めた。
たいしたことはないと思いながら、説明をするには骨が折れる。しょうがないので、解答に書かれていた、一般の点 (x, y) が点 (x', y') に写ったとして関係式を求め、それから行列を求めたのだが、どうも後味が悪い。
何とかならないかと考えたのが次の方法である。

2　計算

図を書くとすぐわかるように、$(3, -1)$ と $(-3, 1)$, $(1, 3)$ と $(1, 3)$ が線対称なので、求める一次変換を表す行列 A は

$$A\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と書かれる。これから、

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3　一般の例

$l : y = ax$ に対して、計算してみよう。
l 上の点 (0,0),(1,a) を中心とした対称な点として、$(a, -1)$, $(-a, 1)$ と $(1, a)$, $(1, a)$ をとる。
求める表現行列 A は、次の関係式を満たす。

$$A\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

これから

$$A = \frac{1}{a^2 + 1}\begin{pmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ 2a & a^2 - 1 \end{pmatrix}$$

4 回転

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{\pi}{2})) \end{pmatrix}$$

ここで、$a = \tan\dfrac{\theta}{2}$, $\theta - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right)$ である。