置換積分の見方

金沢光則

平成 16 年 5 月 5 日

数３の置換積分法では、次のような公式と使い方がある。

置換積分法 (1)

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし } x = g(t)$$

わざわざ左辺と右辺を入れ替えた式も公式としてのせている。

置換積分法 (2)

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \quad \text{ただし } x = g(t)$$

これらを次のように使っている。

$$\int (2x-5)^3 dx = \int \left\{2 \cdot \frac{t+5}{2} - 5\right\}^3 \left(\frac{t+2}{2}\right)' dt = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{x^2+1}(x^2+1)'dx = \int \sqrt{t}dt = \frac{2t\sqrt{t}}{3} + C = \frac{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3} + C$$

前者では、x の中に代入した結果がきれいになり、しかもそれを微分したとき t が残ってはいけないので結局 x が t の１次式でなければならないように見える。
後者では一部がちょうど $g'(t)$ になるようなうまい置き換えが見つからないと使えないように見える。

昔はもっと自由に使っていたように思うのだが $\cdots$

置換積分の本質は変数変換である。したがってもっとも重要な部分は、$dx = g'(t)dt$ である。不定積分では x も t も同時に他方の関数と考えることができるので $dt = \dfrac{dx}{g'(t)}$ と考えて dt を消すと考えても良い。

置換積分法

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f(x)\frac{dt}{g'(x)} \quad \text{ただし } t = g(x)$$

はいかがだろうか。
$f(x)$ の中の複雑で１かたまりと考えたい部分 $g(x)$ をまとめて t とおき、上の変形で x がなくなる、あるいは t で表すことができれば t で積分できると考えるのである。
数学ができる人は皆この方針で解いているのではないだろうか？

３つの部分が関係する集合の要素の個数を求める問題では公式を使わず関係式を書き下して解くことができる。「一次式の関係から１文字を消すことができる」ことだけでできるのであるが、とことんやらなければ最後までたどり着けない。
しかし、手持ちの知識を総動員して次のステップを攻撃するのは学問の鉄則であり、思考の自由性につながると思うのだが。