一般の相加・相乗平均

金沢光則

平成 14 年 7 月 13 日

高校で習う相加平均と相乗平均の関係は $n=2$ のときであるが，この事実は一般の自然数 n に対して成り立つ。
この事実も面白いが，通常の証明が逆向きの帰納法を使うことも面白い。これを（推薦）入試に使うこともあるようなので紹介しておこう。また，微分と組み合わせることにより，通常の向きの帰納法で証明することもできる。

問題

n を自然数, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を非負実数とするとき，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

が成り立つ。ここで，等号の成り立つのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときである。

1　逆向きの帰納法

逆向きでは，無限に多くの主張を証明することはできない。ドミノ倒しに例えれば，とびとびにどんどん先のドミノを倒す動きと，あるところが倒れたら，後ろ向きに連続して倒れる動きが組合わさり，結果として全部が倒れるという感じである。

1.1　$n=1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots$ に対して成り立つことの証明

$n=1$ のとき成り立つことは明らかであり，$n=2$ のとき成り立つことは，高校で既習である。
後は，$n=k$ のとき成り立つと仮定して，$n=2k$ のとき成り立つことを言えばよい。

$n=2k$ (kは自然数) とし，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2k} \geqq 0$ とする。
$n=2,\ n=k$ に対しては相加平均・相乗平均の関係が成り立っているので，

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2k}}{2k} &= \frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\dfrac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+k}}{k}}{2} \\
&\geqq \sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\cdot\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+k}}{k}} \\
&\geqq \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{k+k}}} = \sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}
\end{aligned}$$

となり，不等式が成り立つことがわかる。等号が成り立つ場合を考える。

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},\qquad \frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+k}}{k}$$

がともに >0 のときは，2つの不等号が同時に成り立つ $\iff \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=\dfrac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+k}}{k}$ かつ $a_1=a_2=\cdots=a_k$ かつ $a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots=a_{k+k}$ が成り立つときであり，これは $a_1=a_2=\cdots=a_{2k}$ であることと同値である。
片方が $=0$ のときは，最初の不等号が成り立つことより両方とも $=0$ となる。これから $a_1=a_2=\cdots=a_{2k}(=0)$ となる。

以上で，$n=2^k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ に対して相加平均・相乗平均の関係が成り立つことが証明された。
次はいよいよ逆向きの帰納法によって，すべての自然数 n に対して成り立つことを証明する。

1.2　後ろ向きの帰納法

$n=k+1$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定して，$k=k$ のとき成り立つことを証明しよう。
$a_1, a_2, \cdots, a_k \geqq 0$ とする。
$a_{k+1}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ とおく。$a_{k+1}=0$ なら $a_1=a_2=\cdots=a_k=0$ ゆえ成り立っている。
そこで $a_{k+1}>0$ と仮定してよい。このとき帰納法の仮定より，次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}} \\
\frac{ka_{k+1}+a_{k+1}}{k+1} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}} \\
(a_{k+1})^{k+1} &\geqq a_1a_2\cdots a_ka_{k+1} \\
(a_{k+1})^{k} &\geqq a_1a_2\cdots a_k \\
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} &\geqq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}
\end{aligned}$$

この変形は同値変形であり，最初の $\geqq$ で，等号が成り立つのは，帰納法の仮定から

$$a_1=a_2=\cdots=a_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \iff a_1=a_2=\cdots=a_k$$

のときである。よって $n=k$ のときも成り立つ。

これで，一般の相加平均・相乗平均の関係が証明された。

2　前向きの帰納法

$a_1, a_2, \cdots, a_n \geqq 0$ のとき，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \iff \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$$

よって，$a_1, a_2, \cdots, a_n \geqq 0$ として $f_n(x)=\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+x}{n}\right)^n-a_1a_2\cdots a_{n-1}x$ とおくとき，$x\geqq 0$ で $f_n(x)\geqq 0$ であることを示す，としたいのですがこのままではうまくいきません。そこでちょっとした仮定をつけます。$0\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots a_{n-1}\leqq x$ とします。元々の式は対称式だから，こう仮定しても問題はありません。
$n=1, n=2$ のときは成り立っている。
そこで，$n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定する。

$$f_{k+1}{}'(x) = (k+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+x}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1} - a_1a_2\cdots a_k$$
$$= \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+x}{k+1}\right)^k - a_1a_2\cdots a_k$$

ここで，帰納法の仮定から

$$f_{k+1}{}'\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right) = \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k - a_1a_2\cdots a_k \geqq 0$$

また，

$$f_{k+1}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right) = \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{k+1} - a_1a_2\cdots a_k\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right) \geqq 0$$

となる。
よって $x \geqq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ のとき，$f_{k+1}(x) \geqq 0$ が成り立つ。$a_{k+1} \geqq a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ ゆえ $a_{k+1} \geqq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ となり，$n = k+1$ のとき成り立つことがわかる。
$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$ のとき等号が成り立つのは明らかだから，等しくないものがある場合に等号が成り立たないことを言えばよい。
$a_1, a_2, \cdots, a_k$ の中に等しくないものがある場合は，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} > 0$ に注意すれば，$f_{k+1}(a_{k+1}) \geqq f_{k+1}(a_k) > 0$ となる。
$a_1 = a_2 = \cdots = a_k < a_{k+1}$ のときは，

$$f_{k+1}{}'\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} + t\right) = (a_k+t)^k - (a_k)^k > 0 \quad (t > 0)$$

から $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} < x < a_{k+1}$ となる x をとることができ，このとき $f'_{k+1}(x) > 0$, $f_{k+1}(x) \geqq 0$ となるので $f_{k+1}(a_{k+1}) > 0$ が成り立つ。