ある不等式

金沢光則

平成 14 年 7 月 13 日

問題

n を自然数とし，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots x_n$, $y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots y_n$ とする。さらに $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を並べ替えたものとする。
このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leqq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2$$

だいぶ前に東大で出された入試問題のようである。生徒に聞かれて考えていくうちに，帰納法の意味や試行錯誤の練習に良い問題ではないかと思うようになった。

1 試行錯誤

この問題のように，自然数 n に関する問題は，帰納法を使うことも多い。様子を見るために，$n = 1, n = 2$ の場合を調べてみるのは当然の成り行きである。
ところが，具体的に調べもしないで一般的な状況から考え始めていく者も多い。うまくいくこともたまにはあるが，単に解答しているだけという態度ではうまくない。どういうことなのか，何が問題なのか，どこに切り崩すポイントがありそうかと考えていくことが必要である。2 次試験の問題は，先が見えるものだけではないのだし，ほとんどの受験生ができない問題があって当然なのだから。
そのようなときは，本当の数学を行うように考えていくことが重要となる。

1.1 $n = 1$ の場合

$z_1 = y_1$ となるので，左辺と右辺は一致してしまう。つまり，$\{y_n\}$ を並べ替えた効果が出ていない。

1.2 $n = 2$ の場合

$z_1 = y_1, z_2 = y_2$ となるか，または $z_1 = y_2, z_2 = y_1$ となるかのいずれかである。
前者の場合は $n = 1$ のときと同じで明らかに成り立つ。
後者の場合は

$$(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 = -x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_1 + x_2y_2 = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqq 0$$

となって成り立つ。

1.3　$n = 3$ の場合

$\{y_n\}$ の並べ替え方は $3! = 6$ 通りある。これを実行しても，次の $n = 4$ をやり通す気にはならない。
しかし，実行しようとすると，

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \leqq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_3)^2 + (x_3 - y_2)^2$$

は帰納法の仮定より明らかに成り立つことがわかる。つまり，$x_k = y_k$ となる k が存在すれば良いことがわかる。
もし帰納法を使うとしたら，

$$(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_3)^2 + (x_3 - y_1)^2 \leqq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_3)^2 + (x_3 - y_2)^2$$

も証明しなければならず，しかもこれを $n = 2$ のとき成り立つ事実を使って示さなければならない。そのためには左辺を平方数２つの和の部分を作らなくてはならない。

$$(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_3)^2$$

と最初の２つを考えるか

$$(x_2 - y_3)^2 + (x_3 - y_1)^2$$

と最後の２つを考えるかである。
ここで，添え字に惑わされることなく最後の２つの場合だけ，y_3 と y_1 を入れ替えると帰納法の仮定が使えて，

$$(x_2 - y_3)^2 + (x_3 - y_1)^2 \leqq (x_2 - y_1)^2 + (x_3 - y_3)^2$$

となることに気付くかも知れない。つまり $z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n$ が成り立たなくなるような部分列に対して帰納法の仮定を適用することになる。
この辺で，一般的な状況で考察してみるのが良いだろう。

1.4　一般の場合

帰納法を使うとき，最初や最後に注目することが多いので，

$$(x_1 - z_1)^2 \quad と \quad (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2$$

のように最初の１つとそれ以外に分解するかも知れない。このような場合, 帰納法の仮定から $z_2 \leqq z_3 \leqq \cdots z_n$ と仮定しても良いが，z_1 がどの位置にはいるのかわからないので，y_k に書き直すことができず，このまま場合分けを続けていくのは気が重い。それだけでなく，前の節にあるように，この場合分けでは実際何も役に立っていないかも知れない。
気が重くてもアイディアがなければ突き進む勇気と根気が重要である。しかし，ここでは気が重い部分を解析し，楽な道を模索しよう。
z_1 とすると y_k に変えられなくて表現が難しかったので，$y_1 = z_k$ となるような k を選んではどうだろうか。ここで，最初の k 項と残りに分解する方法が自然に見えるが，これも表現が難しい。では，k 項を除くというのはどうだろうか。

$$(x_k - y_1)^2 + (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_{k-1} - z_{k-1})^2 + (x_{k+1} - z_{k+1})^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2$$

帰納法の仮定から

$$\leqq (x_k - y_1)^2 + (x_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_{k-1} - y_k)^2 + (k_{k+1} - y_{k+1})^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$$

となる。ここで，最初の k 項に対して帰納法の仮定を適用すればうまくいくように見える。ただし，帰納法を「$n = k$ のとき成り立てば」ではなくて,「$n \leqq k$ のとき成り立てば」としなくてはならない。
さらに，$k = n$ のときはうまくいっていない。形が確定するので，別に扱えば示すことはできるが。
この場合うまくいかなかったのは，２つに分けることができない場合があったからである。
そこで，第１項＋その他の項の和を考えるのではなく，第２項＋その他の項の和で考えてみよう。また，帰納法の仮定で入れ替えるなら，z_n にこだわる必要もないのだから x_n で考えてみよう。
これで実行したのが次の証明である。

2　証明

$n = 1, 2$ のとき成り立つので，$n = k$ (k は２以上の自然数) に対して成り立つと仮定して $n = k + 1$ のとき成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} & (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_{k+1} - z_{k+1})^2 \\ = \quad & (x_2 - z_2)^2 + (x_1 - z_1)^2 + (x_3 - z_3)^2 + \cdots + (x_{k+1} - z_{k+1})^2 \\ \leqq \quad & (x_2 - z_2)^2 + (x_1 - z'_1)^2 + (x_3 - z'_2)^2 + \cdots + (x_{k+1} - z'_k)^2 \end{aligned}$$

ここで，$\{z'_m\}$ は $\{z_m\}$ $(m \neq 2)$ を並べ替えたものであり $z'_1 \leqq z'_2 \leqq z'_3 \leqq \cdots z'_k$ である。
$z_2 \neq y_{k+1}$ なら，$z'_k = y_{k+1}$ となるので，帰納法の仮定から前半の k 個を並べ替えることができるので，成り立つことがわかる。$z_2 = y_{k+1}$ なら $z'_1 = y_1$ ゆえ，第２項 $(x_1 - y_1)^2$ を除いて並べ替えることが可能であり，この場合も成り立つことがわかる。
以上から，帰納法が完成する。