瀬山先生出題の問題

金沢光則

平成 15 年 8 月 6 日

1　出自

２００３年８月５日、新潟会館で行った SEM 特別例会懇親会の席で群馬大学瀬山先生が述べられた問題の一部である。

2　べき乗の性質１

どんな整数も十分大きな n に対して 2^n の先頭としてあらわれる。

2.1　概説

$\log 2$ が無理数であることからわかるというのだが $\cdots$

3　べき乗の性質２

適当な n を選ぶと $3^n = \cdots 00 \cdots 01$ とできる。この 0 の数はいくつにもできる。

3.1　概説

フェルマーの小定理を使えばわかると、懇親会では述べられていたが、実際には、フェルマーの小定理そのものである。例えば、3^{40} は $\cdots 01$ である。これを使わないでも初等的にできるという話もあったが、これはまだわからないなあ。

4　連続自然数の和

$6 = 1 + 2 + 3$ のように、ほとんどの整数は連続する自然数の和で表せる。なにが表せて、何が表せないのだろうか。

4.1　概説

$1 + 2 + 3$ は三角数と呼ばれる。連続する自然数の和は、その頭をもいだ等脚台形の形になった数である。奇数は２段で、偶数 $\times$ 奇数は奇数段にすればよい。奇数因数を持たない２のべきについては等脚台形の形にならないことを示すのは易しい。

5　階乗と平方数

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ は平方数にならない。$n!$ が平方数になる場合はあるのだろうか。もちろん $n \geqq 2$ である。

5.1　概説

n と $2n$ の間に素数が必ず存在するという大定理 (デリクレの素数定理) を使えば存在しないことが証明できるが、これではつまらない。もっと簡単な証明が欲しいが、今のところ得られていないとのことであった。
$n!$ にあらわれる最大の素数を p とするとき $n!$ が平方数なら $n \geqq 2p$ である。これで、上の定理を使えば直ちに矛盾が生じる。

6　平方数

$4n^2 + 4n - 1$ はどんな整数 n に対しても平方数にならない。

6.1　概説

$(2n+1)^2 - 2 = m^2$ の形にする。平方数の差は $(a-b)(a+b)$ の形になるが、$0 < a \leqq b$, (a, b は整数) からこれが 2 となることはない。とその場で答えたのは、上杉先生でした。
平方数は mod 4 で 0 または 1 であるという事実を使ってもできますが、上の証明の方が簡単ですね。