q 分三角形の相似条件について

新潟県立国際情報高等学校　西條和久

平成 10 年 10 月 1 日

1　はじめに

数学セミナー 1998 年 3 月号の数学ライブに次の記事が出ていた。

「任意の $\triangle ABC$ が与えられたとする。m, n を自然数として，線分 BC, CA, AB を $m:n$ に内分する点をそれぞれ A', B', C' とし，$\triangle A'B'C'$ を考える。同様に，線分 $B'C', C'A', A'B'$ を $m:n$ に内分する点をそれぞれ A'', B'', C'' とし，$\triangle A''B''C''$ を考える。同様に次々に内側に三角形を作っていく。$m:n$ といちいち言うのは面倒なので，$q = \dfrac{n}{m+n}$ とおいて，内側の三角形のことを外側の三角形の"q 分三角形"と呼ぶ。$\triangle A'B'C' = \triangle ABC$ の q 分三角形である。そして，与えられた三角形の q 分三角形をとるという操作を次々に繰り返していき，はじめの三角形と相似なものが再び現れるかを考える。実は，$q \neq 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1$ ならば，相似な三角形は二度と出てこないのである。」

私はこの記事に大変興味を持った。数学セミナーではこの問題をモジュライ的アプローチで解いていたのだが,「行列の問題として直接解くこともできる」と書いてあったので，ここでは行列の問題として解くことにする。

2　相似になることの言い換え

$A_0 = A, B_0 = B, C_0 = C$ とおき，n 番目の q 分三角形を $\triangle A_nB_nC_n$ とおく。$q = \dfrac{n}{m+n}$ だから，$m:n = (1-q):q$ である。$\triangle ABC$ の重心を始点とする A_n, B_n, C_n の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{c_n}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_{n+1}} &= q\boldsymbol{b_n} + (1-q)\boldsymbol{c_n} \\ \boldsymbol{b_{n+1}} &= q\boldsymbol{c_n} + (1-q)\boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{c_{n+1}} &= q\boldsymbol{a_n} + (1-q)\boldsymbol{b_n} \end{aligned}$$

である。このことより，$\triangle A_nB_nC_n$ の重心と $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ の重心が一致することは明らかである。よって $\triangle ABC$ の重心と $\triangle A_nB_nC_n$ の重心は一致する。

重心が始点だから，$\boldsymbol{c_n} = -\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{b_n}$ を上式に代入して整理すると，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{n+1}} &= (q-1)\boldsymbol{a_n} + (2q-1)\boldsymbol{b_n} \\
\boldsymbol{b_{n+1}} &= (1-2q)\boldsymbol{a_n} - q\boldsymbol{b_n} \\
\iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{n+1}} \\ \boldsymbol{b_{n+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q-1 & 2q-1 \\ 1-2q & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで，$M_q = \begin{pmatrix} q-1 & 2q-1 \\ 1-2q & -q \end{pmatrix}$ とおくと，上の関係式より，

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} = {M_q}^n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} \tag{1}
$$

が成り立つ。$\triangle A_n B_n C_n$ が $\triangle ABC$ と相似になるための必要十分条件は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} \\
\text{または} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_0} \\ \boldsymbol{c_0} \end{pmatrix} \\
\text{または} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c_0} \\ \boldsymbol{a_0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ただし，$t \in (0,1), \theta \in [0, 2\pi)$)

ここで，$\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{c_0} = \boldsymbol{0}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_0} \\ \boldsymbol{c_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_0} \\ -\boldsymbol{a_0} - \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{c_0} \\ \boldsymbol{a_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a_0} - \boldsymbol{b_0} \\ \boldsymbol{a_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これらを先ほどの式に代入すると，必要十分条件は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} \\
\text{または} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta + \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta - \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix} \\
\text{または} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} -\sin\theta - \cos\theta & -\cos\theta \\ -\sin\theta + \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_0} \\ \boldsymbol{b_0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって，上式と (1) より，${M_q}^n$ が満たすべき条件は,

$$
{M_q}^n = t\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}
$$

$$
\text{または } {M_q}^n = t\begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta+\cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta-\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}
$$

$$
\text{または } {M_q}^n = t\begin{pmatrix} -\sin\theta-\cos\theta & -\cos\theta \\ -\sin\theta+\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4}
$$

である。

3 ${M_q}^n$ の計算

$M_q = \begin{pmatrix} q-1 & 2q-1 \\ 1-2q & -q \end{pmatrix}$ の固有値を λ とおくと，固有方程式は,

$$
\det\begin{pmatrix} q-1-\lambda & 2q-1 \\ 1-2q & -q-\lambda \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\text{よって,}\lambda^2+\lambda+3q^2-3q+1=0
$$

$$
\therefore \lambda = \frac{-1\pm(2q-1)\sqrt{3}i}{2}
$$

このとき，固有ベクトルの 1 つを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと,

$$
(q-1-\lambda)x+(2q-1)y=0
$$

$$
(q-1-\frac{-1\pm(2q-1)\sqrt{3}i}{2})x+(2q-1)y=0
$$

$$
\frac{2q-1}{2}\{(1\mp\sqrt{3}i)x+2y\}=0
$$

$$
\text{よって固有ベクトルの 1 つは,}\begin{pmatrix} 2 \\ -1\pm\sqrt{3}i \end{pmatrix}
$$

である。以上より，固有値を $\lambda = \dfrac{-1+(2q-1)\sqrt{3}i}{2}, \mu = \dfrac{-1-(2q-1)\sqrt{3}i}{2}$ とおき，λ,μ に対応する固有ベクトルの 1 つをそれぞれ

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}
$$

とおくと，

$$M_q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},M_q\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$$
$$\iff M_q\begin{pmatrix}x & z\\y & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & z\\y & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$$

ここで，$P=\begin{pmatrix}x & z\\y & w\end{pmatrix}$ とおくと，

$$P^{-1}M_qP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$$
$$\therefore P^{-1}{M_q}^nP=\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\0 & \mu^n\end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned}{M_q}^n&=P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}x & z\\y & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\0 & \mu^n\end{pmatrix}\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}w & -z\\-y & x\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}\lambda^nxw-\mu^nyz & -\lambda^nxz+\mu^nxz\\\lambda^nyw-\mu^nyw & -\lambda^nyz+\mu^nxw\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで，$\mu=\overline{\lambda},x=2,y=-1+\sqrt{3}i,z=2,w=-1-\sqrt{3}i,\det P=xw-yz$
を代入して，

$${M_q}^n=\frac{1}{-4\sqrt{3}i}\begin{pmatrix}2(-1-\sqrt{3}i)\lambda^n-2(-1+\sqrt{3}i)\overline{\lambda}^n & -4(\lambda^n-\overline{\lambda}^n)\\4(\lambda^n-\overline{\lambda}^n) & -2(-1+\sqrt{3}i)\lambda^n+2(-1-\sqrt{3}i)\overline{\lambda}^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore {M_q}^n=\frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}(\sqrt{3}-i)\lambda^n+(\sqrt{3}+i)\overline{\lambda}^n & -2i(\lambda^n-\overline{\lambda}^n)\\2i(\lambda^n-\overline{\lambda}^n) & (\sqrt{3}+i)\lambda^n+(\sqrt{3}-i)\overline{\lambda}^n\end{pmatrix} \quad (5)$$

4 q の条件

行列 (2),(3),(4) と (5) を比べて，次の 3 通りに場合分けをする。

1. ${M_q}^n=t\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ のとき，

$(\lambda^n - \overline{\lambda}^n)$ は純虚数より，$2i(\lambda^n - \overline{\lambda}^n)$ は実数である。よって，行列 (5) の $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分が等しければよい。

$$(\sqrt{3}-i)\lambda^n + (\sqrt{3}+i)\overline{\lambda}^n = (\sqrt{3}+i)\lambda^n + (\sqrt{3}-i)\overline{\lambda}^n$$
$$\therefore \lambda^n = \overline{\lambda}^n$$

よって，λ^n は実数でなければいけない。このとき，${M_q}^n$ の各成分はすべて実数となる。ここで，

$$\lambda = \frac{-1+(2q-1)\sqrt{3}i}{2} \text{かつ} \; q = \frac{n}{m+n} \in \mathbb{Q}$$

であるので，

$$\lambda \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i) = \{x + y\sqrt{3}i | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

である。λ^n が実数のとき，λ^{2n} も実数であり，このとき，

$$\lambda^{2n} = |\lambda|^{2n} = (|\lambda|^2)^n = \left(\frac{3q^2-3q+1}{4}\right)^n \in \mathbb{Q}$$

である。また，このとき，$\lambda^{2n} = |\lambda|^{2n}$ であるから，

$$\left(\frac{\lambda^2}{|\lambda|^2}\right)^n = 1$$

よって $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2}$ は 1 の n 乗根である。ここで，$|\lambda|^2 \in \mathbb{Q}$ より，$\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ である。

ここで，$\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ の 1 の n 乗根は次の 6 種類しかないことが知られている。[1]

$$\pm 1, \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

以上より，

$$\frac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = \pm 1, \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

このことより，q の満たすべき必要条件を求める。

(a) $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = 1$ のとき

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm 1$$
$$\lambda = \pm|\lambda|$$

このとき，λ は実数でなければいけないから，

$$\therefore q = \frac{1}{2}$$

[1]「代数的整数論　第 2 版」　高木貞治著　岩波書店

(b) $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = -1$ のとき

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm i$$
$$\lambda = \pm|\lambda| i$$

このとき，λ は純虚数でなければならないが，これを満たす q は存在しない。

(c) $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$\lambda = \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}|\lambda|$$

これを満たすことより，

$$\therefore q = 0$$

(d) $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = -\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$
$$\lambda = \pm\frac{-\sqrt{3}+i}{2}|\lambda|$$

これを満たすことより，$|\lambda| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $q = \dfrac{2}{3}$

$$\therefore q = \frac{2}{3}$$

(e) $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$
$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}|\lambda|$$

これを満たすことより，$|\lambda| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $q = \dfrac{1}{3}$

$$\therefore q = \frac{1}{3}$$

(f) $\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = -\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$\lambda = \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}|\lambda|$$

これを満たすことより，$|\lambda| = 1$ かつ $q = 1$

$$\therefore q = 1$$

以上より，$q = 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1$ が必要ということがわかった。また逆にこのとき，${M_q}^n$ は題意を満たす形をしていることは簡単に確かめられる。

2. ${M_q}^n = t\begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta+\cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta-\cos\theta \end{pmatrix}$ のとき，

行列 (5) について，$(1,1)$ 成分 $+$ $(2,1)$ 成分 $=$ $(2,2)$ 成分 は成り立っているから，$(1,1)$ 成分 $-$ $(2,1)$ 成分 $=$ $(1,2)$ 成分 が成り立つことが必要である。このとき，

$$(\sqrt{3}-i)\lambda^n + (\sqrt{3}+i)\overline{\lambda}^n - 2i(\lambda^n - \overline{\lambda}^n) = -2i(\lambda^n - \overline{\lambda}^n)$$
$$(\sqrt{3}-i)\lambda^n + (\sqrt{3}+i)\overline{\lambda}^n = 0$$
$$(\sqrt{3}-i)\lambda^n + \overline{(\sqrt{3}-i)\lambda^n} = 0$$
$$\therefore (\sqrt{3}-i)\lambda^n \text{は純虚数}$$

ここで，$(\sqrt{3}-i)\lambda^n$ が純虚数であるための $\lambda^n = x+yi (x, y \in \mathbb{R})$ の条件を考える。

$$(\sqrt{3}-i)(x+yi) = (\sqrt{3}x+y) + (-x+\sqrt{3}y)i$$

であるから，これが純虚数になるための条件は,

$$\sqrt{3}x = -y$$

である。よって，λ^n は次のように表せる。

$$\lambda^n = t(1-\sqrt{3}i) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ここで，$(1-\sqrt{3}i) = 2 \times \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ で，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ は 1 の 3 乗根だから，λ^{3n} は実数である。よって，

$$\lambda^{3n} = |\lambda|^{3n}$$
$$\Longrightarrow \lambda^{6n} = |\lambda|^{6n}$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\lambda^6}{|\lambda|^6}\right)^n = 1$$

ここで，

$$\frac{\lambda^6}{|\lambda|^6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$$

であるから，$\dfrac{\lambda^6}{|\lambda|^6}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ の 1 の n 乗根である。先程と同様に，

$$\frac{\lambda^6}{|\lambda|^6} = \pm 1, \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

これより，q の必要条件を求めると，

$$q = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$$

である。また逆にこのとき，${M_q}^n$ は題意を満たす形をしている。

3. ${M_q}^n = t\begin{pmatrix} -\sin\theta - \cos\theta & -\cos\theta \\ -\sin\theta + \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$ のとき，

行列 (5) について，$(1,2)$ 成分 $+$ $(2,2)$ 成分 $=$ $(1,1)$ 成分 は成り立っているから，$(2,2)$ 成分 $-$ $(1,2)$ 成分 $=$ $(2,1)$ 成分 が成り立つことが必要である。このとき，

$$\begin{gathered}
(\sqrt{3}+i)\lambda^n + (\sqrt{3}-i)\overline{\lambda}^n + 2i(\lambda^n - \overline{\lambda}^n) = 2i(\lambda^n - \overline{\lambda}^n) \\
(\sqrt{3}-i)(\lambda^n + \overline{\lambda}^n) = 0 \\
\therefore \lambda^n \text{は純虚数} \\
\Longrightarrow \lambda^{2n} \text{は実数} \\
\Longleftrightarrow \lambda^{2n} = |\lambda|^{2n} \\
\Longleftrightarrow \left(\frac{\lambda^2}{|\lambda|^2}\right)^n = 1
\end{gathered}$$

$$\frac{\lambda^2}{|\lambda|^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$$

であるから，$\dfrac{\lambda^2}{|\lambda|^2}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ の 1 の n 乗根である。先程と同様に，

$$\frac{\lambda^2}{|\lambda|^2} = \pm 1, \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

これより，q の必要条件を求めると，

$$q = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$$

である。また逆にこのとき，${M_q}^n$ は題意を満たす形をしている。
以上より，q の必要十分条件は

$$q = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$$

であることがわかった。

5　終わりに

今年の一橋大学の二次試験に次の問題が出ていたので紹介しておく。
「$\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB を $t : 1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とおき，$\triangle A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 を $t : 1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とおく。ただし，$0 < t < 1$ とする。
(1) $\triangle A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が $\triangle ABC$ のいずれかの辺と平行になる t の値を求めよ。
(2) (1) のとき，$\triangle A_2B_2C_2$ は $\triangle ABC$ に相似であることを示し，その相似比を求めよ。」