不等式の証明について

金沢光則

平成 16 年 5 月 2 日

問題

$x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$e^x > 1 + x$

数▪の教科書にある普通の問題である。
この解答は次のようになっている。

解答

$f(x) = e^x - (1 + x)$ とおくと、$f'(x) = e^x - 1$
$x > 0$ のとき、$e^x > 1$ であるから、$f'(x) > 0$
よって、$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する。したがって
$x > 0$ のとき、$f(x) > f(0) = 0$
ゆえに、$e^x > 1 + x$

最近この問題を授業でやっていて奇異に感じることがあった。
それは、関数 $f(x)$ の定義域である。問題になっているのは $x > 0$ だから $x > 0$ が定義域なのであろうか。
もしそうだとすると、$f(0)$ はいったいなんだろう。
もし、$x \geqq 0$ が定義域だとすると、$x > 0$ における単調増加が $x \geqq 0$ に拡張されるのはなぜだろう。
もちろんそれは $f(x)$ が $x \geqq 0$ で連続だからであるが、そのことを注意しないのは何か意味があるのか？
連続性が微分可能性から出てくるからだろうか。その場合の定義域は、$x > -\epsilon$ と考えているからだろうか。これだと確かに定義域をわずかに拡張するのが見た目で不自然なので説明したくないなあ。
$x \geqq 0$ で考えた場合、右微分係数を計算しているわけでもないし、もし、$x > 0$ での導関数が $x = 0$ でも成り立つというなら、導関数の連続性までも前提として考えている訳なので、やりすぎである。
それで、しょうがなく、最近は次のようにしている。

$f(x) = e^x - (1 + x)$ $(x \geqq 0)$ とおくと、$f(x)$ は定義域で連続である。

この一言は、簡単に確認できるし、これで完全に理解できるようになる。なぜこのような解法をとらないのだろうか。不思議でならない。