$\tan$ の積

金沢光則

平成 15 年 6 月 20 日

問題

$\dfrac{\tan 10^\circ \tan 50^\circ}{\tan 20^\circ} = \tan 30^\circ$ が成り立つことを聞いた。この一般化はできないだろうか。

図形から予想されたと大関先生から聞いたものである。

1　アイディア

積和と和積だけで $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ にまで還元することができた。この計算を一般に適用する。

1.1　公式

$$
\begin{aligned}
& \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\therefore\quad & \sin 30^\circ \sin 2\alpha = \sin\alpha \sin(90^\circ - \alpha) \\
\therefore\quad & \frac{1}{2}(\sin 30^\circ - \sin\alpha)\frac{1}{2}\{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin 2\alpha\} = \frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin\alpha)\frac{1}{2}\{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin 2\alpha\} \\
\therefore\quad & \sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-3\alpha}{2} \\
& \qquad = \sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}\sin\frac{90^\circ-3\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ+\alpha}{2} \\
& \tan\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(45^\circ - \frac{3\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$A = \dfrac{\alpha}{2}$ とおいて、次を得る。

$$\tan(15^\circ - A)\tan(45^\circ + A) = \tan(15^\circ + A)\tan(45^\circ - 3A)$$

はじめの式は $A = 5^\circ$ として得られるが、他の値を A に代入することで、異なる等式を得ることができる。

1.2　$\sin$ の積

上の計算の中で

$$\sin 30 \sin 20^\circ = \sin 10^\circ \sin 80^\circ$$

という関係式があらわれた。これは１つが有理数であるが、４つとも無理数で成り立つ例はあるのだろうか。ちなみに、角に制限を付けない場合はもちろん存在する。角として許容するのは $\dfrac{\pi}{n}$ の形の角である。