cos の積

金沢光則

平成 15 年 6 月 20 日

問題

「$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$, $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ を計算せよ。」という問題をよく見るが、似た問題は見たことがない。できないのだろうか。

５月 SEM 例会で阿部先生が提起した問題である。

1 アイディア

元々は積和と和積を使って計算するのだが、それだけでは様子がわからない。そこで、異なる方法で証明する。

$$
\begin{aligned}
& \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\
= \; & \frac{e^{\pi/9i}+e^{-\pi/9i}}{2}\cdot\frac{e^{2\pi/9i}+e^{-2\pi/9i}}{2}\cdot\frac{e^{4\pi/9i}+e^{-4\pi/9i}}{2} \\
= \; & \frac{1}{8}(e^{\pi/9i}+e^{-\pi/9i})(e^{2\pi/9i}+e^{-2\pi/9i})(e^{4\pi/9i}+e^{-4\pi/9i}) \\
= \; & \frac{1}{8}(e^{3\pi/9i}+e^{\pi/9i}+e^{-\pi/9i}+e^{-3\pi/9i})(e^{4\pi/9i}+e^{-4\pi/9i}) \\
= \; & \frac{1}{8}(e^{7\pi/9i}+e^{5\pi/9i}+e^{3\pi/9i}+e^{\pi/9i}+e^{-\pi/9i}+e^{-3\pi/9i}+e^{-5\pi/9i}+e^{-7\pi/9i}) \\
= \; & \frac{1}{8}(e^{-7\pi/9i}+e^{-5\pi/9i}+e^{-3\pi/9i}+e^{-\pi/9i}+e^{\pi/9i}+e^{3\pi/9i}+e^{5\pi/9i}+e^{7\pi/9i}+e^{9\pi/9i})-\frac{1}{8}e^{\pi i} \\
= \; & \frac{1}{8}\cdot\frac{e^{-7\pi/9i}(e^{2\pi i}-1)}{e^{2\pi/9i}-1}-\frac{1}{8}e^{\pi i} \\
= \; & \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

1.1 $\cos$ 2個の積

$$\begin{aligned}
&\cos\theta\cos 2\theta\\
=\;& \frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2}\cdot\frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{2}\\
=\;& \frac{1}{4}(e^{3\theta i}+e^{\theta i}+e^{-\theta i}+e^{-3\theta i})\\
=\;& \frac{1}{4}(e^{-3\theta i}+e^{-\theta i}+e^{\theta i}+e^{3\theta i}+e^{5\theta i})-\frac{1}{4}e^{5\theta i}\\
=\;& \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-3\theta i}(e^{10\theta i}-1)}{e^{2\theta i}-1}-\frac{1}{4}e^{5\theta i}
\end{aligned}$$

したがって、$5\theta=\pi$、すなわち $\theta=\dfrac{180^\circ}{5}=36^\circ$ なら $\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\dfrac{1}{4}$ である。

この式の値は、$\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ であることを使うと直接確かめることができる。

1.2 一般個数では

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n}\cos 2^{k-1}\theta\\
=\;& \cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta\\
=\;& \frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2}\,\frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{2}\,\frac{e^{2^2\theta i}+e^{-2^2\theta i}}{2}\cdots\frac{e^{2^{n-1}\theta i}+e^{-2^{n-1}\theta i}}{2}\\
=\;& \frac{1}{2^n}\left\{e^{(2^n-1)\theta i}+e^{(2^n-3)\theta i}+e^{(2^n-5)\theta i}+\cdots+e^{(-2^n+1)\theta i}+e^{(2^n+1)\theta i}\right\}-\frac{1}{2^n}e^{(2^n+1)\theta i}\\
=\;& \frac{1}{2^n}\,\frac{e^{2(2^n+1)\theta i}-1}{e^{2\theta i}-1}-\frac{1}{2^n}e^{(2^n+1)\theta i}\\
=\;& \frac{1}{2^n}\left\{e^{(2^n-3)\theta i}+e^{(2^n-5)\theta i}+\cdots+e^{(-2^n+1)\theta i}\right\}+\frac{1}{2^n}e^{(2^n-1)\theta i}\\
=\;& \frac{1}{2^n}\,\frac{e^{2(2^n-1)\theta i}-1}{e^{2\theta i}-1}+\frac{1}{2^n}e^{(2^n-1)\theta i}
\end{aligned}$$

よって、$(2^n+1)\theta=\pi$ とすると、$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos 2^{k-1}\theta=\frac{1}{2^n}$ ， $(2^n-1)\theta=\pi$ とすると、$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos 2^{k-1}\theta=-\frac{1}{2^n}$
$180^\circ=2^2\cdot 3^2\cdot 5$ ゆえ、$\dfrac{\pi}{2^n+1},\dfrac{\pi}{2^n-1}$ が度数で表示したとき整数となるのは、$2^n+1=3,5,9$ すなわち $n=1,2,3$ と、$2^n-1=3,15$ すなわち $n=2,4$ しかない。それぞれ、$\theta=60^\circ,36^\circ,20^\circ$ と $\theta=60^\circ,12^\circ$ に対応する。

1.3 $\theta=12^\circ$ を計算する

積和を使うと、$\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\sin 54^\circ\right)\left(\dfrac{1}{2}-\sin 18^\circ\right)$ までは計算できるが、これ以上変形することは難しい。

実際$\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ = -\cos 12^\circ \cos 24^\circ \sin 42^\circ \sin 6^\circ = -(\sin 42^\circ \cos 12^\circ)\times(\sin 6^\circ \cos 24^\circ) = -\dfrac{1}{4}(\sin 54^\circ + \sin 30^\circ)(\sin 30^\circ - \sin 18^\circ)$

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\sin 54^\circ = \sin 3\times 18^\circ$ を使うことにより

$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\sin 54^\circ\right)\left(\dfrac{1}{2}-\sin 18^\circ\right) = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = -\dfrac{1}{16}$

と計算できる。

2　和

前節の結果は、$e^{m\theta i}$ の和を計算することによって得られたものである。それでは、cos の和の形でも面白い結果があるのだろうか。

2.1　すぐわかること

$$
\begin{aligned}
& \prod_{k=1}^{n} \cos 2^{k-1}\theta \\
= \ & \cos\theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{n-1}\theta \\
= \ & \frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2}\frac{e^{2\theta i}+e^{-2\theta i}}{2}\frac{e^{2^2\theta i}+e^{-2^2\theta i}}{2}\cdots\frac{e^{2^{n-1}\theta i}+e^{-2^{n-1}\theta i}}{2} \\
= \ & \frac{1}{2^n}\{e^{(2^n-1)\theta i}+e^{(2^n-3)\theta i}+e^{(2^n-5)\theta i}+\cdots+e^{(-2^n+1)\theta i}\} \\
= \ & \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2}+\frac{e^{3\theta i}+e^{-3\theta i}}{2}+\frac{e^{5\theta i}+e^{-5\theta i}}{2}\cdots+\frac{e^{(2^n-1)\theta i}+e^{-(2^n-1)\theta i}}{2}\right\} \\
= \ & \frac{1}{2^{n-1}}\{\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cdots+\cos(2^n-1)\theta\} \\
= \ & \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos(2k-1)\theta
\end{aligned}
$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos(2k-1)\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \left(\theta = \dfrac{\pi}{2^n+1}\right) \\ -\dfrac{1}{2} & \left(\theta = \dfrac{\pi}{2^n-1}\right) \end{cases}$

2.2　角が自然数倍の場合

$$
\begin{aligned}
& \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos n\theta \\
= & \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} + \frac{e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}}{2} + \frac{e^{3\theta i} + e^{-3\theta i}}{2} + \cdots + \frac{e^{n\theta i} + e^{-n\theta i}}{2} \\
= & \frac{1}{2}\{e^{-n\theta i} + e^{(-n+1)\theta i} + e^{(-n+2)\theta i} + \cdots + 1 + \cdots + e^{n\theta i}\} - \frac{1}{2} \\
= & \frac{1}{2}\frac{e^{-n\theta i}\{e^{(2n+1)\theta i} - 1\}}{e^{\theta i} - 1} - \frac{1}{2} \\
= & \frac{1}{2}\frac{e^{-n\theta i}\{e^{2n\theta i} - 1\}}{e^{\theta i} - 1} + \frac{1}{2}e^{n\theta i} - \frac{1}{2} \\
= & \frac{1}{2}\frac{e^{-n\theta i}\{e^{(2n+2)\theta i} - 1\}}{e^{\theta i} - 1} - \frac{1}{2}e^{(n+1)\theta i} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \left(\theta = \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) \\ -1 & \left(\theta = \frac{\pi}{n}\right) \\ 0 & \left(\theta = \frac{\pi}{n+1}\right) \end{cases}$

3　角

最初の結果は、cos に与える角が 2 のべきであった。これはなぜだろう。

3.1　２個の積の場合

$\alpha < \beta$ として

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}\dfrac{e^{\beta i} + e^{-\beta i}}{2} = \dfrac{1}{4}\left(e^{(-\alpha-\beta)i} + e^{(\alpha-\beta)i} + e^{(-\alpha+\beta)i} + e^{(\alpha+\beta)i}\right)$

ここで、$-\alpha-\beta < \alpha-\beta < -\alpha+\beta < \alpha+\beta$ であり、

これが等差数列となる $\iff 2\alpha = -2\alpha + 2\beta \iff \beta = 2\alpha$

3.2　３個の積の場合

$\alpha < \beta < \gamma$ として

$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \dfrac{1}{8}\left(\sum e^{\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma i}\right)$

ここで、$\alpha+\beta+\gamma > -\alpha+\beta+\gamma > \alpha-\beta+\gamma > \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma & > \cdots \\ -\alpha-\beta+\gamma & > \alpha+\beta-\gamma > \cdots \end{cases}$ であり、

これが等差数列となるのは、$\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$ の場合と、$\beta = 2\alpha$, $\gamma = 2\beta$ の場合である。

残念ながら前者の場合、cos の数を増やしてもきれいな形にならない。

4　sin は？

$\cos\theta = -\sin(\theta + 90°)$ 等を使って sin に直した関係はつまらないし、和については、cos とほとんど同じ結果が成り立つが、積については難しい。

5　無理数として

$\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ は 2 次の無理数
$\cos 20° = x$ とおくと、$\cos 60° = -3\cos 20° + 4\cos^3 20°$ ゆえ $8x^3 - 6x - 1 = 0$ となる。$2x = t$ とおくと、$t^3 - 3t - 1 = 0$ であり、これは有理数解を持たないので 3 次の無理数である。
これでいくと $\cos 12°$ は 4 次の無理数となるが...
一般に、分数の角度で与えられる cos の値は $\mathbb{Q}$ 上代数的である。

5.1　$\cos 12°$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$\sin 3\theta = \cos(90° - 3\theta) = \cos 3(\theta + 90°) = 4\cos^3(\theta + 90°) - 3\cos(\theta + 90°) = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta = \sin\theta(4\cos^2 - 1)$
$\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta = \dfrac{1}{2}$
$\cos\theta = x$ とおくと
$32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$
$2x = t$ とおくと
$t^5 - 5t^3 + 5t - 1 = 0$
左辺は $t - 1$ で割り切れ、
$(t-1)(t^4 + t^3 - 4t^2 - 4t + 1) = 0$
となる。整係数多項式が可約なら整係数多項式に分解される[1]。もちろん、分数は第 2 因子の解にはならないので、この第 2 因子が可約なら $(t^2 + at \pm 1)(t^2 + bt \pm 1)$ (複号同順) と因数分解される。t^3 の係数は $a + b$ であり、t の係数は $\pm(a + b)$ であるが、これは矛盾である。よって、$t^4 + t^3 - 4t^2 - 4t + 1$ は既約であり、$\cos 12°$ は 4 次の無理数である。

[1]代数学講義 p129 定理 4.8