「ポートフォリオ理論」入門

新潟市立明鏡高等学校　**押　金　孝　佳**

1　ポートフォリオ (分散投資) 理論

1.1

株式投資における損得の基準の一つは，投資から得られる収益率 (リターン) である．これは,「一定期間の投資から得られる純益を投資金額で割ったもの」として定義される．例えば，千株 60 万円で買ったＡ社の株が 1 年後に 70 万円に値上がりし，またこの期間に 1 万円の配当があったとすると，その年間収益率は (手数料を無視すると)

$$(70-60+1)/60 = 18.3\%$$

となる．投資戦略の善し悪しは，この収益率の大きさで決まる．従って，もし，株式投資を行うとすれば，この収益率の大きな銘柄を探せばよいのであるが，株価や配当に影響を与える要因は多数あるし，それらが将来どのように変動するかは確実にはわからない．こうした場合，どのような基準で投資戦略を立てると良いかを数学的に定式化したのがマーコビッツ (H.M.Markowitz) であった．1952 年,「The Journal of Finance」に掲載された彼の論文「Portfolio Selection」は，当時は注目を集めなかったが，20 年後の 1973 年の石油危機以後，投資に収益率とリスク評価を組み入れた彼の理論は一躍脚光を浴びることになった．彼の投資理論は，経験と勘にたよる古い株式投資のプロ達の常識を覆す思想革命を引き起こした．マーコビッツの理論は高く評価され，1990 年にノーベル経済学賞を受賞した．以下，金融の「ポートフォリオ」理論の基本を考察してみる．

1.2

初めに，表 1 の 3 つの投資対象[注1]を考える．

表 1 において，各収益率に影響を与える冬の天候の確率は各 1/3 であるとする．毛皮は厳冬になれば大売れで配当は増え株価も上がるが，暖冬になったら売れ行き激減である．一方，ビールはこの逆で，冬は暖かいほど消費が増え収益が上昇する．これに比べると衣服は他の 2 つ程影響を受けない．

A:毛皮の平均収益率 (期待値) は,

$$\frac{1}{3}\times(-8)+\frac{1}{3}\times 20+\frac{1}{3}\times 42 = 18\%$$

[注1] この例は参考文献 [4] による

同様に，B:ビール，C:衣服の平均収益率 (期待値) は，

$$\frac{1}{3} \times 18 + \frac{1}{3} \times 14 + \frac{1}{3} \times 10 = 14\%$$

$$\frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{3} \times 14 + \frac{1}{3} \times 16 = 14\%$$

であるから，平均収益率はA:毛皮が一番で，B:ビール，C:衣服，はともに14%である．しかし，B, Cの収益率が安定しているのに対して，Aは良い場合と悪い場合の差が大きい．

マーコビッツは，彼の論文「Portfolio Selection」(1952) において，投資リスクの基準として収益率の標準偏差をとることを提案した (リスクとは収益が悪くなることではなく，収益の不確実さが大きいことである)．
例えば，A:毛皮の収益率の標準偏差は，

$$\sqrt{\frac{1}{3}(-8-18)^2 + \frac{1}{3}(20-18)^2 + \frac{1}{3}(42-18)^2} = \sqrt{\frac{1256}{3}} = \frac{2\sqrt{942}}{3} \fallingdotseq 20.5$$

同様に，B:ビール，C：衣服の収益率の標準偏差は，

$$\sqrt{\frac{1}{3}(18-14)^2 + \frac{1}{3}(14-14)^2 + \frac{1}{3}(10-14)^2} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \fallingdotseq 3.3$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}(12-14)^2 + \frac{1}{3}(14-14)^2 + \frac{1}{3}(16-14)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \fallingdotseq 1.6$$

このリスクを考慮に入れると，望ましい投資基準は次の２点である．

投資基準

- 平均収益率は大きいほど望ましい．
- 収益率の標準偏差 (リスク) は小さいほど望ましい．

この基準をもとに３つの投資対象 (表 1) を比較する．まず，BとCの比較では平均収益率が等しく，リスクはCが小さいのでCが勝る．AとCの比較では，好みにより選択が

表 1: 収益率

	暖冬	平年並み	厳冬	平均	標準偏差
A:毛　皮	-8	20	42	18	20.5
B:ビール	18	14	10	14	3.3
C:衣　服	12	14	16	14	1.6
確率	1/3	1/3	1/3		

異なる．リスクが大きくともより大きな平均収益率を優先する人はAを，その反対の人はCを選ぶことになる．

ここで興味深いことは，単一の投資対象としては魅力のないBもポートフォリオ (分散投資) を考えると価値が生じることである．例えば，Aに 0.2，Bに 0.8 の割合で分散して投資すると，暖冬の場合の平均収益率 (期待値) は，

$0.2 \times (-8) + 0.8 \times 18 = 12.8\%$

同様に，平年並みのときは 15.2%，厳冬のときは 16.4%(表 2) となる．

表 2: A, Bへの分散投資

	暖冬	平年並み	厳冬	平均	標準偏差
C:衣　服	12	14	16	14	1.6
D:0.2A+0.8B	12.8	15.2	16.4	14.8	1.5

注目すべきは，ポートフォリオ D：0.2A+0.8B は，どのような場合でもCより収益率で勝り，かつリスクもCより小さくなっていることである．A, Bへの投資割合をいろいろ変化させた別表[注2]を参照するとリスクはさらに小さくできることがわかる．

図 1: 平均収益率と σ

図 2: 投資比率と σ^2

ポートフォリオにより，リスクをヘッジ (回避) できるのである．反面，平均収益率を大きくしようとするとリスクも増す (ハイリスク・ハイリターン) こともわかる．

1.3

ポートフォリオにより，リスクが減少する理由を調べてみよう．いま，2 つの投資対象AとBがあり，A, Bへの投資比率を $t : 1 - t$ とする．このとき，A, Bによるポートフォリオの平均収益率 (期待値) とリスク (分散) を計算する．

[注2]別紙資料 4

ポートフォリオの平均収益率

A, Bおよびポートフォリオの収益率を r_A, r_B, r_p とすると，
$r_p = r_A t + r_B(1-t)$ であるから，平均収益率は，
$E[r_p] = E[r_A t + r_B(1-t)] = E[r_A]t + E[r_B](1-t)$
各期待値を ¯ (バー) で表すと，

$$\begin{aligned} \bar{r}_p &= \bar{r}_A t + \bar{r}_B(1-t) \\ &= (\bar{r}_A - \bar{r}_B)t + \bar{r}_B \qquad (1) \end{aligned}$$

となる．すなわち，ポートフォリオの平均収益率は，個々の平均収益率の加重平均である．

ポートフォリオのリスク

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= E[(r_p - \bar{r}_p)^2] \\ &= E[\{r_A t + r_B(1-t) - \bar{r}_A t - \bar{r}_B(1-t)\}^2] \\ &= E[\{(r_A - \bar{r}_A)t + (r_B - \bar{r}_B)(1-t)\}^2] \\ &= E[(r_A - \bar{r}_A)^2]t^2 + 2E[(r_A - \bar{r}_A)\cdot(r_B - \bar{r}_B)]t(1-t) + E[(r_B - \bar{r}_B)^2](1-t)^2 \\ &= \sigma_A^2 t^2 + 2v_{AB}t(1-t) + \sigma_B^2(1-t)^2 \qquad (2) \\ &= (\sigma_A^2 - 2v_{AB} + \sigma_B^2)t^2 + 2(v_{AB} - \sigma_B^2)t + \sigma_B^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

となる．ただし，v_{AB} はA, Bの共分散である．
(3) 式の t^2 の係数を α とすると，相関係数 ρ_{AB} の定義より，

$\rho_{AB} \equiv \dfrac{v_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} \leqq 1$ だから，$v_{AB} \leqq \sigma_A \sigma_B$

よって，

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv (\sigma_A^2 - 2v_{AB} + \sigma_B^2) \\ &\geqq (\sigma_A^2 - 2\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2) \\ &= (\sigma_A - \sigma_B)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

となる．$\rho_{AB} \neq 1$ の場合，$v_{AB} < \sigma_A\sigma_B$ であるから，この場合には，

$$\alpha \equiv (\sigma_A^2 - 2v_{AB} + \sigma_B^2) > (\sigma_A - \sigma_B)^2 \geqq 0$$

従って，(3) 式より，次の (4) 式

$$\sigma_p^2 = \alpha t^2 + 2(v_{AB} - \sigma_B^2)t + \sigma_B^2 \qquad (4)$$

は，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で下に凸な放物線である．
$t=0$ のとき，$\sigma_p^2 = \sigma_B^2$，$t=1$ のとき，$\sigma_p^2 = \sigma_A^2$ だから，
$v_{AB} < \min(\sigma_B^2,\ \sigma_A^2)$ であるとき (すなわち，$\rho_{AB} < \min(\sigma_B/\sigma_A,\ \sigma_A/\sigma_B)$ の場合) には，$0 < t < 1$ のある範囲の t において，σ_p^2 は σ_A^2, σ_B^2 のいずれよりも小さくなる．
よって，その範囲で $\sigma_p < \sigma_A$，σ_B であるから，ポートフォリオによりリスクはヘッジ (回避) されることになる．

最小リスク

4 ページの (2) 式より，$\underline{\rho_{AB} = 1 \text{ の場合}}$，$v_{AB} = \sigma_A \sigma_B$ だから，

$\sigma_p^2 = (\sigma_A t + \sigma_B(1-t))^2$ となり，ポートフォリオのリスク σ_p は個々のリスクの加重平均である．すなわち，同じ変動をしていく投資対象の組合せではリスクをヘッジできない．しかし，$\underline{\rho_{AB} = 1 \text{ でない限り}}$，$\sigma_p$ は個々のリスクの加重平均よりも小さくなる．

$-1 \leqq \rho_{AB} \leqq 1$ だから，ρ_{AB} が -1 に近ければ近いほど，σ_p は小さくなり，0 になる場合もある．

リスク最小となる投資比率を求めてみる．4 ページの (4) 式は下に凸な放物線であるから，頂点で最小となる．

$\dfrac{d\sigma_p^2}{dt} = 2\alpha t + 2(v_{AB} - \sigma_B^2) = 0$ とおくと，

$\alpha \equiv \sigma_A^2 - 2v_{AB} + \sigma_B^2$ より，

$$t = \frac{\sigma_B^2 - v_{AB}}{\sigma_A^2 - 2v_{AB} + \sigma_B^2} \tag{5}$$

のとき，(4) 式の最小値を得る．$v_{AB} < \min(\sigma_B^2,\ \sigma_A^2)$ の場合には，$0 < t < 1$ である．(5) 式の t を t^* とすると，t^* において，σ_p^2 は最小であり，かつ σ_p も最小になる．

2 ページの表 1 において，$v_{AB} = -66.67$ であるから，(5) 式より，

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{\sigma_B^2 - v_{AB}}{\sigma_A^2 - 2v_{AB} + \sigma_B^2} \\ &= \frac{(3.3)^2 - (-66.67)}{(20.5)^2 - 2(-66.67) + (3.3)^2} \\ &= 0.137 \end{aligned}$$

よって，

$$t^* = 0.137$$

のとき，ポートフォリオ D：tA + $(1-t)$B は最小リスクとなる．

なお，最小リスクのポートフォリオは必ずしも最適なポートフォリオではない．最適なポートフォリオは，目標とする平均収益率 (期待値) とリスク (標準偏差) のかね合いで選択される．

1.4

投資対象が 2 つの場合，ポートフォリオの計算に必要なデータは，それぞれの収益率の期待値とリスク，および 1 個の共分散の計 5 個である．

投資対象が n の場合，収益率の期待値とリスクは $n + n = 2n$，共分散は ${}_n\mathrm{C}_2$ 個で，総計，

$$n + n + {}_n\mathrm{C}_2 = \frac{n(n+3)}{2} \text{ (個)}$$

東証 1 部上場株 1360 銘柄[注3]を対象とすると，$n = 1360$ の場合だから，926840 個のデータが必要になる．大型コンピュータを用いてもこのままの形でポートフォリオの計算 (2 次計画問題の解法) を行うのは容易ではなく，実際には，いろいろなコンパクト分解が行われている．

1.5　日常生活におけるポートフォリオ

以下の例 (1)〜(4) は参考文献 [9] による，また，(5)〜(17) は授業で生徒が考えた例である．

(1) 大リーグでは事故を恐れて，飛行機で移動する際にはチームを分散させる．

(2) 少額資金を多数に融資する方が，巨額資金を特定の企業に融資するより返済不能の危険が少ない (融資上限 50 万円の消費者金融と住専・銀行との差)．

(3) 石油の輸入国の多様化．

(4) 海外ツアーで各自がパスポートを持つ (添乗員に一括して預けると，盗まれた場合すべてを失う)．

(5) 盗難を避けて，多額の現金は持ち歩かない．

(6) 釣りで，一つの仕掛けだけでなく，いろいろなパターンを持っていく．

(7) 戦闘で部隊を分散させておくと，集中攻撃を受けない．

(8) 旅行時に現金は何ヵ所かに分けて入れておく．

(9) 銀行預金は，何行かに振り分けておく．

(10) バスケットの試合に行くとき，ボールを何人かで分けて持っていく (誰かが忘れても，試合はできる)．

(11) 合い鍵は，本来の鍵と別の場所にしまっておく．

(12) 外食に行くとき，休業の可能性を考えて，予め，他の何店かを調べておく．

(13) 絵の具をパレットに全部入れてしまわない (他の色と混じったとき，全てがその色になってしまう)．

(14) 色落ちしそうなものは別に洗濯をする (色落ちしたとき，全てに色が付いてしまう)．

[注3] 1999.10.1 現在

(15) 旅行に行くとき，秋ならではの気候の変わり易さを考慮し，長袖と半袖の着替えを両方持っていく.

(16) RPG[注4]で戦闘に入ったとき，ダメージの回復に，異なるパターンの回復を 2 人同時に用いる (非常にマニアックな内容が長々と書かれていたが，この分野の筆者の知識不足により判別し難い).

(17) 料理のとき，材料を一度に全部使わない (失敗してもやり直せるように).

(5)〜(17) は，生徒の柔軟な感性が現れていておもしろい．(7) で戦闘という意外な言葉が出てくるが，(16) 同様にコンピューターゲームの影響であろう.

参考文献

[1] 相田　洋・宮本祥子, マネー革命１，２，３, ＮＨＫ出版,1999.

[2] 伊藤　清, 確率論と歩いた 60 年 (第 14 回京都賞記念講演抄録), 数学セミナー,4,1999.

[3] 木島正明, ファイナンス工学入門　,　, 日科技連,1994.

[4] 今野　浩, 数理決定法, 朝倉書店,1992.

[5] 今野　浩, 実践数理決定法, 日科技連,1997.

[6] 鈴木義一郎, 確率で見る人生, 講談社,1993.

[7] 数学教育協議会編, 算数・数学なっとく辞典, 日本評論社,1994.

[8] 谷岡一郎, ギャンブルフィーヴァー, 中公新書,1996.

[9] 福井幸男, 知の統計学３, 共立出版,1998.

[10] 三宅輝幸, デリバティブのしくみ, 日本実業出版社,1998.

[注4]ロール・プレイング・ゲーム