ポートフォリオ

押金孝佳

平成11 年 10 月 22 日

1　はじめに

数学Ｂの確率変数の和について E(X+Y)=E(X)+E(Y), V(X+Y)=V(X)+V(Y) という式がある。後者については、X, Y が独立だと仮定しているがその仮定をはずしたらどうなるのだろう。一般には、

$$
\begin{aligned}
V(X+Y) &= E[(X+Y-x-y)^2] \\
&= E[\{(X-x)+(Y-y)\}^2] \\
&= E[(X-x)^2+2(X-x)(Y-y)+(Y-y)^2] \\
&= V(X)+2E[(X-x)(Y-y)]+V(Y)
\end{aligned}
$$

と共分散が出てきて難しい。ここで $x = E[X]$, $y = E[Y]$ とした。しかし、$tX + (1-t)Y$ に対して適用すると、

$$
\begin{aligned}
E[tX+(1-t)Y] &= tE[X]+(1-t)E[Y] \\
V[tX+(1-t)Y] &= V(tX)+2E[(tX-tx)((1-t)Y-(1-t)y)]+V((1-t)Y) \\
&= t^2V(X)+2t(1-t)E[(X-x)(Y-y)]+(1-t)^2V(Y) \\
&= t^2V(X)+t(1-t)\{V(X)+V(Y)-V(X-Y)\}+(1-t)^2V(Y) \\
&= V(X-Y)t^2+\{V(X)-V(Y)-V(X-Y)\}t+V(Y)
\end{aligned}
$$

ここで、$V(X-Y) = 0 \iff X = Y$ ゆえ、$X \neq Y$ ならこれは t の下に凸の２次関数となる。
最小値があるのだが、それはどういう意味を持つのだろうか。

2　意味づけ

確率変数 X, Y を株価としよう。X や Y の平均は、非常に長く手元に持っていれば得られるだろう価値を表している。しかし、実際には大きく変動する。いつ得をし、いつ損をするか分からない。また、会社が倒産することもあるから、無制限にその株を持っているという仮定は適当ではない。実際この条件が無ければ、たとえポーカーでも必ず勝つ方法は存在する。したがって、安定して利益を得ることを考えるには、分散が小さいことを要求しなければならない。これをリスクと定義しよう。一般に、平均が大きい株はリスクも大きい。今までは、勘に頼って、いくつかの株に分散投資し、儲けを得ようとしていたのである。さて、分散投資は、$tX+(1-t)Y$ $(0 < t < 1)$ に相当する。この場合の平均は、$E[tX+(1-t)Y] = tE[X]+(1-t)E[Y]$ ゆえ、X, Y の平均の最小値より大きい。リスクは、$V(tX+(1-t)Y) = V(X-Y)t^2+\{V(X)-V(Y)-V(X-Y)\}t+V(Y)$ で、もちろん $X \neq Y$ だから、これは下に凸の二次関数となる。その頂点が開区間 $(0,1)$ に入ると、平均は下がらず、リスクだけが下がるという非常にうまい話になってしまう。

3　頂点の位置

頂点の位置は、

$$\frac{V(X-Y)-V(X)+V(Y)}{2V(X-Y)} = \frac{1}{2} - \frac{V(X)-V(Y)}{2V(X-Y)}$$

したがって、

$$\text{頂点が (0,1) の中にはいる} \iff \left|\frac{V(X)-V(Y)}{V(X-Y)}\right| < 1 \iff \frac{V(X)-V(Y)}{V(X-Y)} < 1 \text{ かつ } \frac{V(Y)-V(X)}{V(X-Y)} < 1$$

である。共分散 $E[(X-x)(Y-y)]$ を v_{XY} で表すことにする。

$$\begin{aligned} & \frac{V(X)-V(Y)}{V(X-Y)} < 1 \\ \iff \quad & V(X)-V(Y) < V(X) - 2v_{XY} + V(Y) \\ \iff \quad & v_{XY} < V(Y) \end{aligned}$$

もう一つの式から、$v_{XY} < V(X)$ が出るので、$v_{XY} < min\{V(X), V(Y)\}$ がうまい話の条件となる。下にあげた相関係数 ρ_{XY} の言葉で言えば、$\rho_{XY} < \min\left(\sqrt{\frac{V(X)}{V(Y)}}, \sqrt{\frac{V(Y)}{V(X)}}\right)$ となる。

4　解釈

一般に $|v_{XY}| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$ が成り立つ。$\frac{v_{XY}}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ の値は相関係数と呼ばれ、-1 と 1 の間に値をとるが、X, Y に関係が無ければ 0 に近づき、逆の傾向があれば、その値は負になる。
したがって、多くの銘柄の株の中から、逆の相関傾向を持つ株を選べば、リスクを減らしながら、つまり、確実性をあげながら、平均、すなわち利益を短期間に得ることが可能となる。

4.1　どれくらい良くなるのか

リスクの最小値 m は、

$$\begin{aligned} m &= V(Y) - \frac{(V(X)-V(Y)-V(X-Y))^2}{4V(X-Y)} \\ &= V(Y) - \frac{(v_{XY}-V(Y))^2}{V(X-Y)} \\ &= V(Y) - \frac{(v_{XY}-V(Y))^2}{V(X)-2v_{XY}+V(Y)} \end{aligned}$$

ここで、$V(X) = r^2V(Y)$ $(r > 0)$ とおくと、

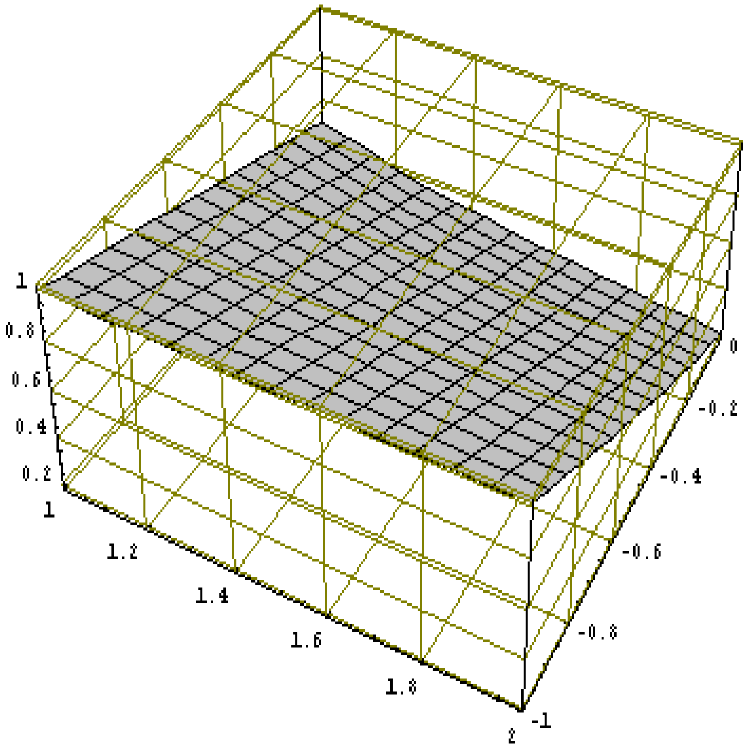
$$\begin{aligned} m &= V(Y) - \frac{(\rho_{XY}\sqrt{r^2V(Y)}\sqrt{V(Y)} - V(Y))^2}{r^2V(Y) - 2\rho_{XY}\sqrt{r^2V(Y)}\sqrt{V(Y)} + V(Y)} \\ &= V(Y) - \frac{V(Y)^2(\rho_{XY}r-1)^2}{V(Y)\{r^2-2\rho_{XY}r+1\}} \\ &= V(Y)\left\{1 - \frac{(\rho_{XY}r-1)^2}{r^2-2\rho_{XY}r+1}\right\} \end{aligned}$$

ここで、$V(Y) < V(X)$ すなわち $1 < r$ と仮定すると、

$$0 < 1 - \frac{(\rho_{XY}r-1)^2}{r^2-2\rho_{XY}r+1} < 1 \iff 0 < \frac{(\rho_{XY}r-1)^2}{r^2-2\rho_{XY}r+1} < 1$$

であり、$\dfrac{(\rho_{XY}r-1)^2}{r^2-2\rho_{XY}r+1}$ の値が１に近い方がリスクは減る。

$\rho_{XY}=t\ (-1<t<0)$ と置いて, $f(r,t)=\dfrac{(tr-1)^2}{r^2-2tr+1}$ のグラフを $1<r<2$, $-1<t<0$ において Mathematica で計算すると、次のようになる。



ρ_{XY} が -1 に近いようにとることは実際的でないので、$r=1$ に近いように、すなわち $V(X)=V(Y)$ (あるいは、X と Y の標準偏差が同じくらい) に近いようにとれば、リスクは悪くとも半分には減るようである。

5 終わりに

この話は、ポートフォリオに関して、ＳＥＭの定例会において押金先生が話されたことをまとめたものである。

ただ、構成を数Ｂ用の教材としたことと、確率変数の値を使わないようにしたことについては、金沢の責任である。