数の不思議3

金沢光則

平成 21 年 8 月 4 日

1　はじめに

次に上げるのが、東北大オープンキャンパス理学部数学科の受付で配られていた数学クイズの問題である。

数学クイズ

1/12377 を小数で表したとき、小数点以下第 6193 桁目の数は何か？

計算する方法についての解説が裏に書いてあることを知らずに計算していたが、計算するだけなら裏を見ればわかるので、止めてしまった。
しかし、後半部分を完成するためにまとめてみた次第である。

大まかに言えば、小数展開の最初の何桁かは実際に計算することができる。実際、最初からしばらくは 0 が続く。6193 は 12377 の半分より少し大きいのがみそである。循環節が 12376 の約数なら半分から後には最初と同じものが並び、そうでないなら各桁にある数の和が 9 となるように数が並ぶ。あとは、循環節が 12376 であるかどうかを調べるだけである。
前半は、「数の不思議 1」で述べたことと同じであるが、後半部分については、平方剰余の相互法則を使って計算している。

1.1　循環節に現れる数の性質

フェルマーの小定理

p を素数とするとき、p を因数に持たない正の整数 a に対して $a^{p-1} \equiv 1(p)$

簡単に証明をつけておく。

$$
\begin{aligned}
a^p &= ((a-1)+1)^p \\
&= (a-1)^p +_p C_1(a-1)^{p-1} +_p C_2(a-1)^{p-2} + \cdots +_p C_{p-1}(a-1) +_p C_p \\
&\equiv (a-1)^p + 1
\end{aligned}
$$

p が素数なので、${}_pC_k = \dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ は、$k \neq 0, p$ なら p の倍数となることに注意しよう。
後は、帰納的に

$$a^p \equiv (a-1)^p + 1 \equiv (a-1)^p + 1 + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = a$$

a は p で割り切れないので、$a^{p-1} \equiv 1$ となる。

12377 は素数なので、

$$10^{12376} \equiv 1(12377)$$

となる。

循環節の長さ

$1/p$ を小数展開したときの循環節の長さは、$10^q \equiv 1$ となる最小の $p-1$ の約数 q に等しい。

$1/p$ の循環説の長さを n とすると、

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{99\cdots 9} = \frac{a}{10^n - 1}$$

よって、$ap = 10^n - 1$ ゆえ $10^n \equiv 1(p)$
最小性は逆にたどることから明らか。
$p-1$ の約数であることは、$p-1 = nk + r$ と $p-1$ を n で割っておくと、$r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

$$1 \equiv 10^{p-1} \equiv (10^n)^k 10^r \equiv 10^r$$

n の最小性から $r = 0$ となる。
$12377 - 1 = 257 \times 3 \times 2^4$ に注意して、循環節の長さを調べよう。$10^{12376} \equiv 1$ なので、

$$10^{6168} \equiv \pm 1$$

である。どちらであるかを調べるために、平方剰余を考える。

1.2　平方剰余と相互法則

$x^2 \equiv a(p)$ が解を持つとき、a を p の平方剰余といい、そうでないとき平方非剰余という。
$a \not\equiv 0(p)$ のとき、a が平方剰余、平方非剰余であるに従い

$$\left(\frac{a}{p}\right) = +1 \text{ or } -1$$

と定義する。これを Legendre の記号という。

Legendre の記号の性質

(1) $a \equiv a'(mod.p)$ なら $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right)$　　(2) $\left(\frac{abc\cdots}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\cdots$

Euler の規準

$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}(mod.p)$

平方剰余の相互法則

(1) $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$　　(2) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$　　(3) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$

1.3　実際の計算

$$
\begin{aligned}
10^{6168} &= 10^{\frac{12367-1}{2}} \\
&\equiv \left(\frac{10}{12377}\right) \\
&= \left(\frac{2}{12377}\right)\left(\frac{5}{12377}\right) \\
&= (-1)^{\frac{12377^2-1}{8}} \times \left(\frac{12377}{5}\right) \times (-1)^{\frac{12377-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}} \\
&= (-1)^{\frac{12376\cdot 12378}{8}} \times \left(\frac{2}{5}\right) \times (-1)^{\frac{12376}{2}\cdot\frac{4}{2}} \\
&= (-1)^{1542\cdot 12378} \times \left(\frac{2}{5}\right) \times (-1)^{\frac{12376}{2}\cdot 2} \\
&= (-1)^{\frac{25-1}{8}} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

したがって、$\dfrac{1}{12377}$=0.0000807 $\cdots$ は循環節の長さが 12376 の小数である。
循環節を半分に切ると、現れる数字は和が 9 になるように現れる。
0.00008 $\cdots$ | ○○○○△ $\cdots$ ○ と小数を書いておく。ここで、| が循環節の半分の切れ目であり、△が求める数字の入る位置である。
従って循環節の後半部分には、99991 $\cdots$ と数字が入っていくので、求める数字は 1 である。