続続 数の不思議

金沢光則

平成 14 年 10 月 13 日

1　はじめに

2002.9.11 に新潟県立教育センターで行われた，飯高茂氏による講演で話された内容の一部に少し手を加えたものである。

2　事実

例えば，$\dfrac{1}{13} = 0.076923076923\cdots = 0.\dot{0}7692\dot{3}$ である。この循環節の長さが 2 の倍数なので，2 等分して足してみると，$\begin{array}{rccc} & 0 & 7 & 6 \\ +) & 9 & 2 & 3 \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$ となって，9 が並ぶ。わり算を実行したときの余りを書けば，順に 1, 10, 9, 12, 3, 4 となる。これも 2 等分して足してみると $\begin{array}{rccc} & 1 & 10 & 9 \\ +) & 12 & 3 & 4 \\ \hline & 13 & 13 & 13 \end{array}$ となる。

一般に，次が成り立つそうである。

p を素数，q，m，n を正の整数とするとき，$\dfrac{q}{p^m}$ が長さ $2n$ の循環節を持つとする。その循環節に現れる数字を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n}，わり算を行ったときに生じる余りを順に r_1，r_2，$\cdots$，r_{2n} とおくと，

$\begin{array}{rcccc} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ +) & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \\ \hline & 9 & 9 & \cdots & 9 \end{array}$　$\begin{array}{rcccc} & r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ +) & r_{n+1} & r_{n+2} & \cdots & r_{2n} \\ \hline & p^m & p^m & \cdots & p^m \end{array}$ となる。

ここまでの話は「続　数の不思議」で述べた。飯高氏は講演の中で，並ぶ数字を 9 以外にできないかと考えたこと，合成数を使って $\dfrac{1}{21} = 0.\dot{0}4761\dot{9}$ が見つかったことを話した。

ところが考えてみると，並ぶ数字を 1 から 9 まで作ることは易しいことである。実際次のような例を作ることができる。

$\dfrac{111}{999999}, \cdots, \dfrac{999}{999999}$

素数ベキであれば和が 9 なので，それ以外の場合は合成数のときに起こるが，この例のようにすべての場合が存在する。

話はここで終わるのだが，9 にならない場合についても,「続　数の不思議」で行った考察を適応してみよう。

3 $\frac{1}{21}$ の場合

$\frac{1}{21}=\frac{47619}{999999}$ であり，$10^6-1=(10^3-1)(10^3+1)\equiv 0 \mod 21$ ここで，$10^3-1\equiv 0 \mod 3$, $10^3+1\equiv 0 \mod 7$ である。

$\frac{1001}{21}=100\times\frac{1}{21}+\frac{1}{21}=47.\dot{6}1904\dot{7}+0.\dot{0}4761\dot{9}=47+\frac{619047}{999999}+\frac{47619}{999999}=47+\frac{666666}{999999}=47+\frac{6}{9}=47+\frac{2}{3}$

また，$\frac{1001}{21}=\frac{1001}{3\times 7}=\frac{143}{3}=47+\frac{2}{3}$

である。

$999999=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$ ゆえ $9\cdot p=a$ (p=7,11,13,37) の形で $10^6-1=(10^3-1)(10^3+1)\equiv 0 \mod a$, $10^3-1\equiv 0 \mod 9$, $10^3+1\equiv 0 \mod p$ の形の数を見つければよい。

$p=7$ が一番小さいので，$a=3^2\cdot 7=63$ でやってみると，

$\frac{1}{63}=0.\dot{0}1587\dot{3}$ となり，和は 8 が並ぶ。この数を 2 倍，3 倍していくことにより，8,7,6,5,4,3 が並ぶ数を作ることができる。