続 数の不思議

金沢光則

平成 14 年 10 月 13 日

1 はじめに

2002.9.11 に新潟県立教育センターで行われた，飯高茂氏による講演で話された内容の一部に少し手を加えたものである。

2 事実

例えば，$\dfrac{1}{13} = 0.076923076923\cdots = 0.\dot{0}7692\dot{3}$ である。この循環節の長さが 2 の倍数なので，2 等分して足してみると，$\begin{array}{rccc} & 0 & 7 & 6 \\ +) & 9 & 2 & 3 \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$ となって，9 が並ぶ。わり算を実行したときの余りを書けば，順に 1, 10, 9, 12, 3, 4 となる。これも 2 等分して足してみると $\begin{array}{rccc} & 1 & 10 & 9 \\ +) & 12 & 3 & 4 \\ \hline & 13 & 13 & 13 \end{array}$ となる。

一般に，次が成り立つそうである。

p を素数，q，m，n を正の整数とするとき，$\dfrac{q}{p^m}$ が長さ $2n$ の循環節を持つとする。その循環節に現れる数字を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n}，わり算を行ったときに生じる余りを順に r_1，r_2，$\cdots$，r_{2n} とおくと，

$\begin{array}{rcccc} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ +) & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \\ \hline & 9 & 9 & \cdots & 9 \end{array}$ $\begin{array}{rcccc} & r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ +) & r_{n+1} & r_{n+2} & \cdots & r_{2n} \\ \hline & p^m & p^m & \cdots & p^m \end{array}$ となる。

また，$\dfrac{1}{13}$ の循環節が 3 の倍数でもあるので，3 等分して足してみると，$\begin{array}{rcc} & 0 & 7 \\ & 6 & 9 \\ +) & 2 & 3 \\ \hline & 9 & 9 \end{array}$ となって，9 が並ぶ。

ただし，この足し算は桁ごとでなく，2 桁の数を加えているので位上がりが生じている。

余りについても 3 等分して足してみると $\begin{array}{rcc} & 1 & 10 \\ & 9 & 12 \\ +) & 3 & 4 \\ \hline & 13 & 13\times 2 \end{array}$ となる。

ここでは，$m = 1$ の場合にこれらの事実を示す。また，3 つに分けた場合，ダメな場合があると言っていた。

3 説明

一般にも通じる方法で具体的に述べる。

3.1 商の２つ折り

$\dfrac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3} = \dfrac{76923}{999999}$ から，$10^6 - 1 = 999999$ は 13 の倍数となるので，$10^6 \mod 13 = 1$ となる。一般に $10^l \equiv 1$ となる最小の自然数 l が循環節の長さである。
$10^6 - 1 = (10^3 - 1)(10^3 + 1) \equiv 0$ であるが，循環節の長さが 3 でないので，$10^3 - 1 \not\equiv 0$ である。13 は素数なので，$\mathbb{Z}_{13}{}^{\times}$ は整域であり，よって $10^3 + 1 \equiv 0$ となる。
$\dfrac{10^3+1}{13} = \dfrac{1}{13} \times 10^3 + \dfrac{1}{13} = 0.076923076923\cdots \times 10^3 + 0.076923\cdots = 76 + 0.\dot{9}2307\dot{6} + 0.\dot{0}7692\dot{3} = 76 + \dfrac{a}{999999} + \dfrac{b}{999999}$
と表しておく。この値が整数であることと，最後の２つの分数が１より小さい正の数であることに注意すれば，この和は 999999 に一致することが分かる。最初の３桁と後ろの３桁の和は全く同じなので，位上がりは生じない。また，各桁ごとの和も $9 + 9 = 18$ では１桁が９にならないので，位上がりが生じないで９となる。

3.2 余りの２つ折り

$\dfrac{1}{13}$ を計算して出てくる余りは順に $1, 10, 9, 12, 3, 4, \cdots$ である。これらは，$1, 10, 10^2, 10^3, \cdots$ を 13 で割ったときの余りに等しい。
上の計算から $10^3 + 1 \equiv 0$ ゆえ，$10^4 + 10 \equiv 0, 10^5 + 10^2 \equiv 0$ となり，余りの和は $1 + 12, 10 + 3, 9 + 4$ と 13 の倍数になる。余りに出てくる数は，1 以上 13 未満なので，それらの和が１３の倍数となるのは実際に 13 のときだけである。
ここは，十日町高校の佐藤先生から教わったものを，商の話にあわせ変更した。

3.3 商の３つ折り

$10^6 - 1 = (10^2 - 1)(10^4 + 10^2 + 1) \equiv 0$ であるが，循環節の長さが 2 でないので，$10^2 - 1 \not\equiv 0$ である。13 は素数なので，$\mathbb{Z}_{13}{}^{\times}$ は整域であり，よって $10^4 + 10^2 + 1 \equiv 0$ となる。
$\dfrac{10^4+10^2+1}{13} = \dfrac{1}{13} \times 10^4 + \dfrac{1}{13} \times 10^2 + \dfrac{1}{13} = 0.076923076923\cdots \times 10^4 + 0.076923076923\cdots \times 10^2 + 0.076923\cdots = 769 + 0.\dot{2}3076\dot{9} + 7 + 0.\dot{6}9230\dot{7} + 0.\dot{0}7692\dot{3} = 776 + \dfrac{a}{999999} + \dfrac{b}{999999} + \dfrac{c}{999999}$
と表しておく。この値が整数であることと，分子の最初の２桁の和 $07+69+23$，次の２桁の和 $69+23+07$，最後の２桁の和 $23 + 07 + 69$ が同じ数であり，さらにこれらすべての和が 999999 の倍数になっている。各分数は１より小さいので $999999, 999999 \times 2 = 1999998$ のどちらかに等しい。$07 + 69 + 23 = x$ とおくと，$(10000 + 100 + 1)x = 999999, 1999998$ ゆえ，$x = 99$ または 198
今は $x = 99$ の場合であった。$x = 198$ の場合は起こらないが，$x = 19998$ なら起こる。
実際，$\dfrac{9898}{9901} = 0.\dot{9}9969700030\dot{2}$ ゆえ２つ折りの場合は $999697 + 000302 = 999999$ となるが，３つ折りの場合は $9996 + 9700 + 0302 = 19998$ となる。
今は３つ折りなので，$10^{3k} + 1$ の因数から調べた。$k = 1$ では $\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{13}$ しかないので，すべて 99 となる。$k = 2$ では $\dfrac{1}{9901}$ しかない。循環節が１２なので，異なる数値の配列があり，分数の和が２になるように，

なるべく大きそうなものを調べたということである。これがダメな場合ということであるなら，２つ折り以外はダメな例があるということであろう。

3.4　余りの３つ折り

上にあげた，あまりの２つ折りと商の３つ折りから明らかである。この場合も，あまりの和が 99 の倍数となることしか言えない。

3.5　一般の場合

これらの性質は，２つ折り，３つ折りだけでなく，いくつの折っても成り立つ。ただ，２つ折りの場合が綺麗である。
講演では，商の性質は仮の姿で余りの性質から得られると述べていたが，$10^n - 1$ の因数分解を使えば統一的に記述することができそうに思う。