# 行列の $n$ 乗<br>因数分解を使って

金沢光則

平成 11 年 10 月 3 日

## 1 始めに

行列の $n$ 乗を計算する方法はたくさんあるが、ここでは、Caley-Hamilton を因数分解した式を使って計算する。
もちろん、行列には零因子があるので、$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ であるからといっても、$A=\alpha E$ または $A=\beta E$ とは言えないのであるが、しかし、この因数分解をうまく使えば、わかるのである。
有名な方法らしいのだが、あまり見かけないようである。

## 2 問題

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$$

が成り立つが、これが

$$(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$$

と因数分解された場合について、$A^n$ を求める。

### 2.1 2つの単根をもつ場合

ここでは、$\alpha \neq \beta$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}(A-\alpha E)A &= (A-\alpha E)\beta E \\ (A-\alpha E)A &= \beta(A-\alpha E)\end{aligned}$$

これの関係を繰り返して

$$(A-\alpha E)A^n=\beta^n(A-\alpha E)$$

を得る。この式１本から $A^n$ を計算するのは面倒であるが、$\alpha \neq \beta$ であることと、$\beta$ に対しても成り立つことから

$$(A-\beta E)A^n=\alpha^n(A-\beta E)$$

も成り立つ。
この 2 本の式を辺々引くことにより

$$(\alpha-\beta)A^n = (\alpha^n-\beta^n)A - \alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})E$$

したがって、

$$A^n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E$$

### 2.2　重根をもつ場合

形式的に、上で与えた式で、$\beta\to\alpha$ としてみると、

$$A^n = n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^n E$$

となる。
$\alpha=\beta$ すなわち $(A-\alpha E)^2=0$ をみたす行列 A の場合の $n$ 乗の形はこうであろう。
$2\times 2$ 行列 A については、$A^n=\alpha A+\beta E$ の形で表され、$A^2=pA+qE$ と書いたとき、係数 $\alpha,\beta$ は $p$, $q$ の多項式になるから連続である。したがって、上の結果は正しい。
高校でのことを考えて帰納法を使ってみよう。
$n=2$ のとき、$A^2=2\alpha A-\alpha^2E$ となるが、これは、$(A-\alpha E)^2=O$ から直ちにわかる。
また、一般に成り立つ $(A-\alpha E)A^{n-1}=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ を展開整理して、

$$A^n=\alpha A^{n-1}+\alpha^{n-1}A-\alpha^nE$$

ここで、帰納法の仮定を使えば、成り立つことが容易にわかる。

## 3　3 次の正方行列の場合

$$(A-\alpha E)(A-\beta E)(A-\gamma E)=O\ \text{ただし}\alpha,\beta,\gamma\text{はすべて異なる}$$

とする。2 次の正方行列の場合と同じく、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}(A-\alpha E)(A-\beta E)A^n&=\gamma^n(A-\alpha E)(A-\beta E)\\(A-\alpha E)(A-\gamma E)A^n&=\beta^n(A-\alpha E)(A-\gamma E)\\(A-\beta E)(A-\gamma E)A^n&=\alpha^n(A-\beta E)(A-\gamma E)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=0\\ \lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\alpha+\gamma)+\lambda_3(\beta+\gamma) &=0\\ \lambda_1\alpha\beta+\lambda_2\alpha\gamma+\lambda_3\beta\gamma &=1\end{cases}$$

となるように、係数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の値を定めたい。このとき、

$$\lambda_1(A-\alpha E)(A-\beta E)+\lambda_2(A-\alpha E)(A-\gamma E)+\lambda_3(A-\beta E)(A-\gamma E)=E$$

となるので、

$$A^n = \lambda_1\gamma^n(A-\alpha E)(A-\beta E)+\lambda_2\beta^n(A-\alpha E)(A-\gamma E)+\lambda_3\alpha^n(A-\beta E)(A-\gamma E)$$

となるからである。
行列で表示すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+\beta & \alpha+\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

両辺に係数行列の余因子行列をかけて、

$$\Delta\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \beta\gamma \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\gamma & \beta+\gamma \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha+\beta \\ \beta\gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha\beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\gamma \\ \alpha\beta & \alpha\gamma \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha\gamma \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\beta & \alpha+\gamma \end{vmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\gamma & \beta+\gamma \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\beta & \alpha+\gamma \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta-\alpha \\ \alpha-\gamma \\ \gamma-\beta \end{pmatrix}$$

これから次を得る。

$$\Delta A^n = (\beta-\alpha)\gamma^n(A-\alpha E)(A-\beta E)+(\alpha-\gamma)\beta^n(A-\alpha E)(A-\gamma E)+(\gamma-\beta)\alpha^n(A-\beta E)(A-\gamma E)$$

$\Delta = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ すなわち差積となる。これにより、$A^n$ がわかった。

# 4 おまけ

$A(A-\alpha E) = \beta(A-\alpha E)$ とみると、$A-\alpha E$ の像として固有ベクトルを考えていることに対応します。その固有ベクトルから元の基本ベクトルを復元するのが、行列のままだとわかりにくいようですね。
$\alpha \neq \beta$ のときは良かったのですが、重根の場合、または、一本の式から計算することもできます。この場合、数列の漸化式と同じように解いていきますが、行列の場合

$$A^n - X = \alpha(A^{n-1} - X)$$

という式は、どんな意味を持っているのでしょうかね。
３次の正方行列では、対称式を要素にもつ行列の行列式が出てきましたが、重根をもつ場合を考えるとすぐわかるように、これは差積—すなわち判別式—を因数にもちます。それだけで、各文字について次数がちょうど一致するので係数を除いて一致しますが、…