一次系

金沢光則

平成 12 年 3 月 31 日

1　始めに

教科書に次の問題がある。

数学

3 直線 $x-y+2=0,\ x+3y+6=0,\ 5x+3y-6=0$ で作られる三角形について、その外接円の方程式と外心の座標を求めよ。

これを解く方法はいくつかある。交点を求めて、その 3 交点を通る円の方程式を決定する。あるいは、2 直線から等距離にある直線が中心を通る事実を使うなどである。しかし、式そのものをうまく使う方法には気付かなかった。ところが、大学の入試問題で似たような問題が出題されているのである。

京大 (1998 後期)

$A_1,\ A_2,\ A_3$ は xy 平面上の点で同一直線上にはないとする。3 つの一次式 $f_1(x,y)=a_1x+b_1y+c_1$, $f_2(x,y)=a_2x+b_2y+c_2$, $f_3(x,y)=a_3x+b_3y+c_3$ は、方程式 $f_1(x,y)=0,\ f_2(x,y)=0,\ f_3(x,y)=0$ によりそれぞれ直線 $A_2A_3,\ A_3A_1,\ A_1A_2$ を表すとする。このとき実数 $u,\ v$ をうまくとると方程式

$$uf_1(x,y)f_2(x,y)+vf_2(x,y)f_3(x,y)+f_3(x,y)f_1(x,y)=0$$

が 3 点 $A_1,\ A_2,\ A_3$ を通る円を表すようにできることを示せ。

この問題を使えば、先の問題は次のように解答することができる。

$$u(x-y+2)(x+3y+6)+(x+3y+6)(5x+3y-6)+v(5x+3y-6)(x-y+2)=0$$

を考える。3 本の直線は平行でないから交わるがこの式が表す図形は明らかにそれら 3 交点を通る。したがって、この式が円を表せばそれが求める方程式である。
この式は $x,\ y$ の 2 次式ゆえ、これが円を表すのは、次の 2 つの条件を満たすときである。

(1) x^2 の係数と y^2 の係数が 0 でなく等しい
(2) xy の係数が 0 である

式で表せば、

$$u+5v+5=-3u+9-3v,\quad 2u+18-2v=0$$

これを解くと、$u=-\dfrac{17}{3},\ v=\dfrac{10}{3}$.
これを代入して整理すると、

$$2x^2-x+2y^2+5y-18=0$$

京大の問題の解答をこの手順で行ってみよう。

$$u(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)+v(a_2x+b_2y+c_2)(a_3x+b_3y+c_3)+(a_3x+b_3y+c_3)(a_1x+b_1y+c_1)=0$$

の係数を調べると、

$$ua_1a_2+va_2a_3+a_3a_1=ub_1b_2+vb_2b_3+b_3b_1=0,\quad u(a_1b_2+b_1a_2)+v(a_2b_3+b_2a_3)+(a_3b_1+b_3a_1)=0$$

これから、次の方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_2a_3-b_2b_3 \\ a_1b_2+b_1a_2 & a_2b_3+b_2a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_3a_1+b_3b_1 \\ -a_3b_1-a_1b_3 \end{pmatrix}$$

この方程式が解ければよいのだから、係数行列の $\det \neq 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \det &= (a_1a_2-b_1b_2)(a_2b_3+b_2a_3)-(a_2a_3-b_2b_3)(a_1b_2+b_1a_2) \\ &= a_1a_2^2b_3-a_3b_1b_2^2-a_2^2a_3b_1+a_1b_2^2b_3 \\ &= (a_2^2+b_2^2)(a_1b_3-a_3b_1) \end{aligned}$$

$f_2(x,y)=0$ が直線を表すから、$a_2^2+b_2^2\neq 0$ であり、$f_1(x,y)=0,\ f_3(x,y)=0$ が表す直線は平行でないから、$a_1b_3-b_1a_3\neq 0$ である。
このように、$kf(x,y)+hg(x,y)=0$ のような形をうまく用いて図形の方程式を得ることがある。
さらに、次の例を見てみよう。

数学

k を定数とするとき、直線

$$(2k+3)x+(3k+1)y-k-5=0$$

は、k の値に関係なく定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

$$k(2x+3y-1)+(3x+y-5)=0$$

と変形すれば、$x,\ y$ の 1 次式だから直線を表し、しかも、特定の 2 直線 $2x+3y-1=0,\ 3x+y-5=0$ の交点を通ることがわかる。

数学

2 つの円 $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2-4x-2y-4=0$ の交点と $(1,1)$ を通る円の方程式を求めよ。

今の流れからすれば、次のように始めることになる。

$$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x-2y-4)=0 \tag{1.1}$$

とおく。$(x,y)=(1,1)$ とおくと、$-2k-8=0$ ゆえ、$k=-4$. このとき、1.1 は、x^2 の係数と y^2 の係数が等しく、xy の項を持たない 2 次式ゆえ、円を表している。点 $(1,1)$ と 2 交点を通るから、これが求める方程式である。
実は、これらはよく見かける次のような問題と同じ根っこを持っている。

数学

グラフが 3 点 $(1,6),\ (-2,-9),\ (4,3)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

数学

3 点 $O(0,0),\ A(2,2),\ B(3,1)$ を通る円の方程式を求めよ。

最初の問題は、求めるグラフを $y = ax^2 + bx + c$ とおき、3点を通ることから、係数 a, b, c が決まってくる。
次の問題は、求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とおき、これも3点を通ることから、係数 l, m, n の値を決定する。
これらの背後にある原理を調べていこう。

2 双対性と一次系

教科書に次のような問題がある。

数学

異なる3直線 $x + y = 1$, $2x + 3y = 1$, $ax + by = 1$ が1点で交わるならば、3点 $(1, 1)$, $(2, 3)$, (a, b) は同一直線上にあることを証明せよ。

交点を (x_0, y_0) とすると、

$$x_0 + y_0 = 1, \quad 2x_0 + 3y_0 = 1, \quad ax_0 + by_0 = 1$$

$(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ に注意すれば、これは、直線 $x_0x + y_0y = 1$ が3点 $(1, 1)$, $(2, 3)$, (a, b) を通ることを示している。
この問題のように、点の座標と係数の座標を読み替える方法により、平面上の点と平面上の直線が対応し、点が直線上にある $\Longleftrightarrow$ 直線が1点で交わるなどがいえる。
このような性質を、双対性という。このアイディアを曲線に対して実行する。

2.1 射影空間

直線と交点を対応させるためには、平行な直線にも交点が対応して欲しい。
そこで、地平線に対応する無限遠直線を導入した射影平面を考えよう。

定義 2.1 $n+1$ 次元ベクトル空間から原点を除いた集合に、2つの点 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ と $\lambda(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ を同一視して得られる空間を n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ という。その座標は、比の値として決まるから、$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ であらわし、斉次座標とよぶ。特に1次元射影空間を、射影直線 $\mathbb{P}^1$, 2次元射影空間を射影平面 $\mathbb{P}^2$ という。

射影直線は、原点を通る平面直線を点と考えたものであるが、座標が $(x : 1)$ となる部分 (有限部分) は、通常の直線である。このように表せない点は、$(1 : 0)$ だけであり、これが無限遠点である。通常の数直線において、左右の ∞ は一致することになる。
射影平面は、原点を通る空間直線を点と考えた空間であるが、座標が $(x : y : 1)$ となる部分 (有限部分) は、通常の平面であり、このように表せない点は、$(x : y : 0)$ 全体である。これが無限遠にあるもので、射影直線と見ることができる。
射影平面の有限部分では $(x : y : z) = \left(\dfrac{x}{z} : \dfrac{y}{z} : 1\right)$ である。後者の点の座標を使うと直線の方程式は $\dfrac{y}{z} = m\dfrac{x}{z} + n$ となるので、分母を払うことで、$ax + by + cz = 0$ の形を得る。これが射影平面における直線の方程式である。

2.2 曲線全体のなす空間

２次曲線は $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$ と書くことができる。係数全部が 0 になることはないし、係数全体をスカラー倍したものも同じ曲線を表すので、この２次曲線と $\mathbb{P}^5$ の点がちょうど対応する。
一般に、n 次曲線全体は $\mathbb{P}^N$ $\left(N={}_3H_n-1={}_{3+n-1}C_n-1={}_{n+2}C_2-1=\dfrac{n(n+3)}{2}\right)$ と見ることができる。
最初の問題で考えてみよう。２次曲線の一般形は $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$. これが、有限部分で円を表すのは、$a=c,\ b=0$ であり、さらに３直線の交点 $(-3,-1),\ (0,2),\ (3,-3)$ を通るから $9a+3b+c-3d-e+f=0,\ 4c+2e+f=0,\ 9a-9b+9c+3d-3e+f=0$ である。これを解くと、$(a:b:c:d:e:f)=(2:0:2:-1:5:-18)$ となり、$2x^2+2y^2-x+5y-18=0$ となる。
一般には、n 次曲線全体は $\mathbb{P}^N$ を成すが、条件を１つ考えるごとに、次元が下がっていく。最終的に $\mathbb{P}^0$ になったとき、それによりただ一つの条件を満たす曲線が求まる。ただし、条件は一次独立なものでないと、次元は下がらない。
$\mathbb{P}^N$ 内の r 次元線形部分空間— 同一視しなければ通常の意味で $r+1$ 次元線形部分空間 — を r 次元の一次系と呼ぶ。特に、１次元の一次系を束、２次元の一次系を網と呼ぶ。束は $\lambda C_1+\mu C_2$ と、網は $\lambda C_1+\mu C_2+\rho C_3$ と表される。

2.3 点を通る条件

よく使われる、点を通るという条件について、一次独立であるのはどういうときか考えてみよう。
射影平面から n 次曲線全体が成す空間 $\mathbb{P}^N$ への対応

$$\phi:(x_0:x_1:x_2)\longrightarrow(x_0^n:x_0^{n-1}x_1:\cdots:x_2^n)$$

を考える。
$\langle P,Q,\cdots,R\rangle$ で、点 $P,\ Q,\ \cdots,\ R$ を含む最小のベクトル空間 (を射影空間の同値関係で割ったもの) を表すことにする。
このとき、

$$\begin{aligned}
& \langle\phi(P_1)\rangle\not\ni\phi(P_2)\\
\Longleftrightarrow\quad & \exists\vec{x}\ \mid\ \phi(P_1)\cdot\vec{x}=0\ \text{かつ}\phi(P_2)\cdot\vec{x}\neq0\\
\Longleftrightarrow\quad & \exists C\in\mathbb{P}^N\ \mid\ C\ni P_1,\text{かつ}\ C\not\ni P_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle\phi(P_1),\phi(P_2)\rangle\not\ni\phi(P_3)\\
\Longleftrightarrow\quad & \exists\vec{x}\ \mid\ \phi(P_1)\cdot\vec{x}=0\ \text{かつ}\phi(P_2)\cdot\vec{x}=0\ \text{かつ}\phi(P_3)\cdot\vec{x}\neq0\\
\Longleftrightarrow\quad & \exists C\in\mathbb{P}^N\ \mid\ C\ni P_1,\text{かつ}\ C\ni P_2\text{かつ}\ C\not\ni P_3
\end{aligned}$$

これは、もっと点の数が多くなっても成り立っている。
この事実を使って次がわかる。

命題 2.2 射影平面上の３点は円錐曲線からなる網を定める。１本の直線上にない４つの点は円錐曲線からなる束を定める。どの４点も１直線上にない５つの点はただ１つの円錐曲線を定める。
ただし、一般に２次曲線を円錐曲線という。

円錐曲線全体は $\dfrac{2(2+3)}{2}=5$ 次元の一次系である。

$l \ni P_1, l \not\ni P_2$ となる直線 l が存在するから、ダブルライン ll が存在し、これは円錐曲線で、P_1 を含み、P_2 を含まない。したがって、P_1, P_2 を通る円錐曲線は 3 次元の一次系である。さらに、P_1 のみを含む直線 l_1 と P_2 のみを含む直線 l_2 が存在するから、円錐曲線 l_1l_2 は P_1, P_2 を含むが、P_3 は含まない。よって、３点 P_1, P_2, P_3 を通る円錐曲線は２次元の一次系となる。
もう１点 P_4 があって、４点が一直線上になければ、P_1, P_2 を通る直線 l_1 と、P_3 を通り、P_4 を通らない直線 l_2 を使えば、l_1l_2 が３点 P_1, P_2, P_3 を含むが P_4 を含まない。よって、P_4 を通る条件を追加すると一次系の次元が下がるので束になる。
最後の主張は、３点が１直線上にある場合とそうでない場合に分けて考えれば、容易にわかる。

3　応用

3.1　Pascal の定理

定理 3.1 (Pascal) 円錐曲線 K 上に６点 A, B, C, D, E, F をとる。AB, DE の交点、BC, EF の交点、CD, FA の交点をそれぞれ X, Y, Z とする。このとき、３点 X, Y, Z は同一直線上にある。

定理 3.2 円錐曲線 K の上に６点 $P_1, P_2, \cdots, P_6$ を定め、これら６点を通過する３次曲線 E_1, E_2 を描く。E_1, E_2 は一般にさらに３点 R, S, T で交差するが、これら R, S, T は同一直線上にある。

定理 3.1 は定理 3.2 の主張に含まれている。これは、楕円曲線上の群構造の結合律を示すのに使われる。後者を証明しよう。
$P_1, P_2, \cdots, P_6, R, S$ を通るという条件が３次曲線全体のなす射影空間 $\mathbb{P}^9$ の一次独立な条件を与えることを確かめる。
３本の直線を使えるから、P_1, P_2, P_3, P_4 まではよい。２次曲線は直線と２つの交点しか持たないから、直線 P_1P_2, P_3 を通る直線, P_4 を通る直線を考えて、P_5 まではよい。同様に、P_6 まで良い。
$P_1, \cdots, P_6$ が２次曲線 K 上の点なので、K と直線 P_1P_2 を使えば、R までよい。さらに、K と R を通る直線を使えば、S まで良い。
以上から、$P_1, \cdots, P_6, R, S$ の点を通る３次曲線全体は１次元の一次系 $\mathcal{L}$ となる。
E_1, E_2 の定義方程式を F, G とおき、K の定義方程式を Q , また直線 RS の定義方程式を L とおくと、F, G, QL は束 $\mathcal{L}$ の元ゆえ、それらの間に線形関係 $\lambda F + \mu G + \rho QL = 0$ が存在する。$\rho \neq 0$, $F(T) = G(T) = 0$, $Q(T) \neq 0$ ゆえ、$L(T) = 0$ となる。すなわち、３点 R, S, T は直線 $L = 0$ 上にある。

3.2　楕円曲線の群構造

ここでは、楕円曲線の正確な定義は述べられないので、標準形を与えておく。

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \qquad (\text{ただし}\lambda \neq 0, 1)$$

この曲線は、非特異３次曲線である。
曲線 E 上に１点 O をとり、固定する。２点 P, Q の和を次のように定義する。E は３次曲線だから、直線 PQ(P=Q のときは、接線を使う) と３点で交わる。P, Q 以外の点を R′ とおく。(R′=P などが成り立つこともある。) 直線 OR′ と曲線 C が交わる第３の点を R とおく。これにより、

$$P + Q = R$$

と定義する。この定義は不必要に難しくしてあるように見えるが、直線 PQ と曲線 E の交点を R と定義すると、単位元の一意性が出ない。

このように定義すると、２項関数として well-defined は明らか。可換であること、単位元 0 の存在も明らかにわかる。O での接線を考えることにより、任意の点 P の逆元 −P の存在もわかる。難しいのは結合律である。
$(P+Q)+R$ を作る課程において、直線 PQ との交点として S_1, 直線 S_1O との交点として S_2=P+Q, 直線 S_2R との交点として S_3, 直線 S_3O との交点として $S_4=(P+Q)+R$ とおく。
また $P+(Q+R)$ を作る課程において、直線 QR との交点として T_1, 直線 T_1O との交点として T_2=Q+R, 直線 PT_2 との交点として T_3, 直線 T_3O との交点として $T_4=P+(Q+R)$ とおく。
S_3, P, T_2 が一直線上にあることをいえば、T_3, P, T_2 も一直線上にあることから、S_3=T_3 となり、(P+Q)+R=P+(Q+R) がわかる。
３次曲線として E, ３直線 PQS_1, T_1OT_2, S_2RS_3 をとる。２次曲線として２直線 QRT_1, S_1OS_2 をとる。このとき、

$$K\cap E, K\cap E' \ni Q, R, O, S_1, S_2, T_1$$
$$E\cap E' \ni S_3, P, T_2$$

よって、Pascal の定理から３点 S_3, P, T_2 は同一直線上にある。

4 教材再考

数学

３直線 $x-y+2=0$, $x+3y+6=0$, $5x+3y-6=0$ で作られる三角形について、その外接円の方程式と外心の座標を求めよ。

３直線の交点を通る２次曲線全体は、２次元の一次系を成す。その中に、$(x-y+2)(x+3y+6)$, $(x+3y+6)(5x+3y-6)$, $(5x+3y-6)(x-y+2)$ がある。また、これらは一次独立なので、網の底となる。したがって円が存在するなら、それは

$$\lambda(x-y+2)(x+3y+6)+\mu(x+3y+6)(5x+3y-6)+\rho(5x+3y-6)(x-y+2)=0$$

と一意にかけるはずである。
京大の問題も同じ構造を持つ。

数学

２つの円 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ の交点と $(1,1)$ を通る円の方程式を求めよ。

この問題の場合 $\lambda(x^2+y^2-4)+\mu(x^2+y^2-4x-2y-4)=0$ とおいて良いこと、すなわち１次元の一次系となる理由を考えよう。
一般の２次曲線全体は $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$ の形の式全体だから、５次元の一次系である。円を表すのは、$b=0$, $a=c$ の場合で、これを満たすのは、３次元の一次系である。２円の交点を P, Q とおくと、P を通らない円が存在するから、P を通るという条件をつけると、２次元の一次系となる。円で P を通るが、Q を通らない円が存在するから P, Q を通る円全体はさらに次元が下がって１次元の一次系となるのである。

数学

３点 $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(3,1)$ を通る円の方程式を求めよ。

これについても一次系の立場で解いてみよう。
直線の方程式は $OA: x-y=0$, $OB: x-3y=0$, $AB: x+y-4=0$ である。３点を通る２次曲線全体は２次の一次系を成す。３直線を２本づつ組み合わせた２次式は、３点を通る一次独立な円錐曲線を表す

から、

$$\lambda(x-y)(x-3y)+\mu(x-3y)(x+y-4)+\rho(x-y)(x+y-4)=0$$

とかける。これが円を表すので、xy の係数が 0 だから、$\mu=-2\lambda$. これにより、

$$\lambda(-x^2+9y^2+8x-24y)+\rho(x^2-y^2-4x+4y)=0$$

x^2 と y^2 の係数が等しいので、$\rho=5\lambda$. これから、

$$x^2+y^2-3x-y=0$$

となる。

与えられた点の条件でなく、点を通る直線の条件にしたのは, 一次系は、超曲面の一次結合で表すことのできる対象だから、余次元が 2 である点の条件をそのまま使うことはできないからである。
最後に, ここであげた京大の問題をこのようにして解けというつもりはない。入試と絡んだ場合, いかに素直に考えていくかが問題となる。ここであげたような発想ができる場合はそれでよいのだが, 連立方程式を場合分け無しにきれいに解くには?, 座標の入った図形の問題では, 座標をきれいに入れてなるべく文字が少なくなるようになどの指導が有効であると思う。この観点は, 残念ながら市販の問題集では見られない。

参考文献

[1] B. L. van der Waerden, 前田博信訳, 代数幾何学入門, シュプリンガー・フェアラーク東京

[2] 志賀弘典, 平面における双対性, 数学セミナー 2000/2,3 月号

[3] 小島敏久, 数学 闘う５０題 ’98 入試数学ベストセレクション