ある１次変換の問題

金沢光則

2013 年 2 月 24 日

1　はじめに

今年の前期試験用に演習をしていて、次の問題を扱った。

山口大学

座標平面上に 3 点 A(0,4), B(7,8), C(x,y) があり、1 次変換 f が $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = A$ を満たしている。

1. 3 点 A,B,C は同一直線上にないことを示せ。
2. 三角形 ABC の重心の座標を求めよ。

(1) を普通に考えると、(2) でやることがわからない。ベクトルの一次独立を使う方法が解答に出ていたが、その場合、(2) は直ちに解けてしまう。
どうしたものかと悩んで、別解を得た。
一つは、行列式を用いて解く。これは上記の方法と同じで、(2) は同時に解けてしまう。だが、着眼点が新しく、気に入っている。
二つ目は、最初に考えた方法であり、(2) は (1) の結果を使って解く。これが大学が想定していた解答かと思う。
全体としては、山がいくつかあり、受験生向けではないと思うが、(1) と (2) の関係が気に入ったので、ここにあげる。

2　解答１：ベクトルの一次独立

(1)A,B,C を縦ベクトルとして表し、一次変換 f の行列を M とする。
二つのベクトル $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ は一次独立なので、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ と表すことができる。
これを f で移すと
$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha M\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \beta M\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
ここで、$\beta = 0$ なら、$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ から、$0 = 7\alpha$, $4 = 8\alpha$ であるが、これは起こらない。
よって $\beta \neq 0$ より、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \frac{\alpha}{\beta}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$
$\alpha\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \frac{\alpha}{\beta}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ は一次独立なので $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\beta = -\frac{\alpha}{\beta}$.

これから $\beta^3=-1$ で、$\beta\in\mathbb{R}$ なので $\beta=-1$ となる。さらに $\alpha=-1$ となる。
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ で、係数の和$=-2\neq 1$ ゆえ、3 点 A,B,C は同一直線上にない。
普通は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-7\\-16\end{pmatrix}$ が平行でないことから結論づけるだろうが、この論法が別解 2 の (2) の解答のキーになる。
(2) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-12\end{pmatrix}$ ゆえ
重心の位置ベクトルは、$\dfrac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\-12\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
よって重心の座標は (0,0)

3　別解：行列

(1) 一次変換 f を表す行列を M とすると、
$M\begin{pmatrix}0&7\\4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&x\\8&y\end{pmatrix}$, $M^2\begin{pmatrix}0&7\\4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\y&4\end{pmatrix}$, $M^3\begin{pmatrix}0&7\\4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7\\4&8\end{pmatrix}$.
第 3 式の行列式を計算すると、$\det M=1$ なので、第 2 式、第 3 式の行列式から
$-28=7y-8x,\ -4\cdot 7=4x$
となり、$x=-7,\ y=-12$.
(2) は同じ。

4　別解：(1) を使う

(1)3 点 A,B,C が同一直線上にあると仮定すると
$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ は一次独立なので
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$
と書ける。これを f で移すと
$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
よって
$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+t(1-t)\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$.
(1,1) 成分を考えて、$7t^2-7t+7=0$. しかしこれは実数解を持たないので、3 点 A,B,C が同一直線上にあるという仮定に反する。よって、3 点 A,B,C は同一直線上にない。
(2) 重心を G とし、f の像を G$'$ とする。
$$f(\overrightarrow{\mathrm{OG}})=f\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right)=\frac{f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})+f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})+f(\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{OG'}}$$
よって、G=G$'$
$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ は一次独立なので $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\alpha\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ とおける。
$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=f(\overrightarrow{\mathrm{OG}})=\alpha\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

よって、$\alpha\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$\alpha\left\{\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right\}-\beta\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

3 点 A,B,C が一直線上にないので、$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ は一次独立である。

よって、$\alpha=\beta=0$ となり、$G(0,0)$ となる。