金沢光則

1　極限と積分

1.1　問題

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}\right\}$ を計算せよ。

1.2　解答例

準備していた標準的な解答は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2n}\right)-\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+2n}\right)\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{2n}{n}}\right)\right\}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\
= & \int_0^2\frac{dx}{2+x}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x} \\
= & \Big[\log|2+x|\Big]_0^2-\frac{1}{2}\Big[\log|1+x|\Big]_0^1 \\
= & \log 4-\log 2-\frac{1}{2}\log 2 \\
= & \frac{\log 2}{2}
\end{aligned}
$$

1.3 標準的でない解答例

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n-1}{2n}}\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{2k-1}{2n}} \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k-\frac{1}{2}}{n}} \\
= & \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x} \\
= & \frac{1}{2}\Big[\log|1+x|\Big]_0^1 \\
= & \frac{\log 2}{2}
\end{aligned}
$$

1.3.1 どこが違うか

練習として出した問題であったが、標準的でない解答例を書いている生徒がいた。$\dfrac{k-\frac{1}{2}}{n}$ という単位を利用するところが新しい。
区分求積の高さの代表値をその区間内ならどこにとっても大丈夫であるから[1]、何の不思議もないのだが、このような具体例を見たことはなかったのでびっくりした。
授業では、みんなができるように、$\dfrac{1}{n}$ が 1 個、他は $\dfrac{k}{n}$ の関数になるとき、$\dfrac{1}{n}$ が dx に替わり、$\dfrac{k}{n}$ が x に替わる。$x=\dfrac{k}{n}$ の k に、値を代入して、x の範囲がわかる、と言っていたのだが。
いまでも、この言い方の方が易しいと思うが、上の例がでてきては生徒の感性をつぶしてしまう押しつけなのかと悩んでしまうところである。

[1] 単調な区間有限個に分解できれば明らかに成り立つ