1　はじめに

８月７日に行った講義の解説です。時間がなかったこともあり，どこがおもしろいかという点についてお話ししました。

2　生徒の質問から

メネラウスの空間版という問題は次のものです。

> 四面体 OABC の辺 OA, OB, AC, BC 上にそれぞれ点 P, Q, R, S があり，これら４点は同一平面上にある。このとき $\dfrac{OP}{PA}\cdot\dfrac{AR}{RC}\cdot\dfrac{CS}{SB}\cdot\dfrac{BQ}{QO}=1$ が成り立つことを示せ。

平面 PQSR と直線 AB は交わらないか，交わればただ１点で X で交わる。このことから，直線 PQ も直線 RS も直線 AB と平行であるかまたは共に同じ点 X で交わる。このことはもちろん証明しなければならない。この後は，平面 OABX と平面 CABX 上で別々にメネラウスを適用すれば直線 ABX 上の比の話になって証明が終わります。
メネラウスに似ているけれど，遂行するために発見すべき部分が難しく，もどかしさを感じながら解答を模索するところがおもしろい。

2.1　あなたならどう答えますか

(1) $3x(x+1)$ と $x(x+3)$ の最小公倍数ではなぜ３がとれるの？
現行カリキュラムで現地調達方式になってから，約数や倍数の話がきちんと載っていない。しかし問題集では相変わらず載っている。
授業で聞かれればおもしろい話も出来るのだが，準備も無しにちょっと聞かれるとつらい問題である。
係数として有理数を考えれば３はいらない。
しかし整数を係数に考えれば３は必要となる。
定義に従えば逆数を持つ係数を考えないのは当然であるが，それではどうしてそう定義したかが見えてこない。
逆数を持てば，3 をいくつ掛けても，$\dfrac{1}{3}$ をいくつ掛けても公倍数であるから，“最小” な公倍数が定義できない。このために，逆数を持つ因数は無視することに決めるのである。

(2) 三角形 ABC の底辺 BC を $a:b$ に内分する点を D とする。
AD の内点を P とするとき，$\triangle ABP:\triangle ACP=a:b$ となるのはなぜ？
最初に計算で示したところ，説明はわかるが納得できないのだということであった。
何回かトライした後で，最終的には P を通り底辺 BC に平行な直線を描き，三角形を等積変形することで「ああそうか」と納得してもらった。
質問者は文系の３年生である。理系の３年生が通りかかったのでこの問題を説明せよといったところ，３人とも同じように計算を始めた。文系の生徒は，理系の生徒のほうがよくわかると思っているが，理解するための道具を沢山持っているのが理系なのでまずは計算を始めるが，本当にわかるというレベルでは，実はあまり差がないのである。

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$ と $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$ はなぜ形が違うの？
これは，数学小話を参照してください。

3　あなたはこの解答で良いと思いますか

ここの解答は，教科書や問題集の解答をそのまま載せたものもあります。自分の感性を磨いてくださいね。

3.1　貼り合わせた関数の微分可能性

関数 $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & =ax^2+bx-2(x\geqq 1) \\ f_2(x) & =x^3+(1-a)x^2(x<1)\end{cases}$ が $x=1$ で微分可能となるように定数 a, b の値を定めよ。

$x=1$ で連続だから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0} f_2(x)=1+1-a=f(1)=f_1(1)=a+b-2\\ \therefore 2a+b &= 4\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0} f'(x) &= \lim_{x\to 1-0} f_2(x)=3+2(1-a)=\lim_{x\to 1+0} f'(x)=\lim_{x\to 1+0} f_1'(x)=2a+b\\ \therefore 4a+b &= 5\end{aligned}$$

これを解いて $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$.

この解答は，最初の連続性については定義通りですが，微分可能性については定義通りではありません。難しいことをいうと，連続微分可能性（微分した関数が連続であるか）を使って議論しています。このような場合直ちに正解とは出来ませんね。たいていは間違いとして 0 点の評価がなされるでしょう。
では，この解答を評価する考え方は無いのでしょうか。
元の関数は実数全体で定義された関数を切った・貼ったで作った関数です。この視点ではどうですか？

3.2　必要条件？

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$ が成り立つように定数 a, b の値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$
ゆえに $a+b=0$ すなわち　$b=-a$.
よって

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

ゆえに $\dfrac{a}{2}=2$. よって $a=4$. したがって $b=-4$.
$a=4$, $b=-4$ のとき、与えられた等式が成り立つ。
よって $a=4$, $b=-4$.

これは，ある教科書の解答をそのまま載せたものです。
最後の2行目の前に「逆に」が省略されているのですが，この2行は必要なのでしょうか。
$b = -a$ は確かに必要条件ですが，その直後の条件式は，b が無いということを除けば与えられた条件そのものです。
一般に条件 p から出てくる必要条件 q がある時，p かつ $q \iff p$ となります。これは真理集合の包含関係を見ればすぐにわかります。

3.3　厳密でない？

奇数の列を次のような群に分ける。

$$1|3, 5|7, 9, 11|13, 15, 17, 19|21, \cdots$$

第 n 群の初項を求めよ。

各群の初項を抜き出すと

$$1, 3, 7, 13, 21, \cdots$$

となる。階差数列を作ると

$$2, 4, 6, 8, \cdots$$

ゆえ階差数列の一般項は $2n$
よって求める，第 n 群の初項を a_n とおくと
$n \geqq 2$ のとき，$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + (n-1)n = n^2 - n + 1.$
これは $n = 1$ のときも成り立つ。

この解答は，私が書いたものです。多くの先生はこの解答に良い評価を与えません。
良しとされる解答は，第 n 群が n 個の項からなるという事実を使い，第 n 群の最初の項は，最初から数えて $1 + 2 + \cdots + (n-1) + 1$ 番目の項であることを述べる方法である。一般にこの解法は生徒にとってわかりにくいようだ。項の番号を指定する数列（自然数列）を並列に書いてやれば納得するのだが，少し出来る子は，上の方法なら自分で発見できてもこの方法を発見することはほとんどない。また，上の方法なら文系の生徒もかなり出来るようになる。
驚いたことに，今年3年の演習で使っている第一学習社のセミナー数学に載っている問題が群のしきりをとった数列の一般項が式で表せず，誘導のかけ方が上の解答を想定している。もちろんこれも大学の入試問題であるようだ。
上の方法が問題であるという理由は,「階差数列そのものが推測であり，証明を行っていない」と言うものである。しかし，各群の個数が n 個であるという主張は推測ではないのだろうか。
ずっと昔の問題では，この部分も厳密に行うために各群の個数を与えてあったように思うが，最近はそうではない。だとすれば，上の解答を評価しないというのは議論の対象になるのではないだろうか。

3.4　同様に確からしい？

3.4.1　最初の問題

　12人の人がボールを1個ずつ持っていて，順番に A, B, C の箱のいずれかに入れていくものとする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，同名の人はなく，空の箱があっても良いものとする。

(1) ボールに自分の名前を書いて箱に入れていく場合，ボールの入り方は何通りあるか。
(2) ボールに自分の名前を書いて箱に入れていく場合，A の箱にちょうど８個のボールが入る入り方は何通りあるか。
(3) ボールに名前を書かずに箱に入れていく場合，A, B, C の箱に入ったボールの個数の組み合わせは何通りあるか。
(4) ボールに名前を書かずに箱に入れていく場合，８個以上のボールが入る箱がある確率を求めよ。

---

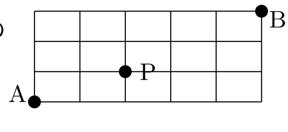
(1) 各ボールがどの箱に入るか，３通りずつあるので，$3^{12} = 531441$ 通り。
(2) A に入るボールの選び方は，${}_{12}C_8 = 495$ 通り。そのそれぞれに，残り４個のボールが B か C の箱に入るので $495 \times 2^4 = 7920$ 通り。
(3) 0 以上の整数 A, B, C が $A + B + C = 12$ を満たすときの解の個数と同じなので，${}_{12+2}C_2 = 91$ 通り。
(4) A に８個以上入るのは，${}_{4+1}C_1 + {}_{3+1}C_1 + {}_{2+1}C_1 + {}_{1+1}C_1 + {}_{0+1}C_1 = 15$. B，C についても同じだけあり，同じものは無いので $\dfrac{15 \times 3}{91} = \dfrac{45}{91}$

---

(1)〜(3) までは問題がないのだが，(4) の解答は間違っており，数値も正しくない。確率を計算するとき，一般に$\dfrac{\text{条件が起こる場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$で計算する。まさに，この問題ではそう計算している。硬貨を投げたとき表が出る確率が$\dfrac{1}{2}$ であるのと同じで，こう計算して良いためには，すべての場合が “同様に確からし” く無ければばならない。(3) で計算した 91 通りの中に，すべてのボールが A に入った場合も１通りで，11 個のボールが A に入り，１個のボールが B に入った場合も１通りとカウントしている。どちらが得か考えると明らかに後者のほうが１２倍起こりやすい。こう考えるということは，実はボールに名前が書いていなくても１つ１つを区別して考えていることになる。つまり，分母として採用しなくてはいけないのは (1) の解答なのだ。このように，確率の計算は ${}_mC_k$ を使う場合でも ${}_MP_k$ を使って計算する方が良いことがある。この問題の面白いのは，組み合わせで計算すると間違い，順列で計算しなくてはならない問題だからである。「同様に確からしい」という条件は実は曖昧なので，(4) が正しくなる解釈があるのかも知れない。実際には，91 通りは見かけの数なので，よくある硬貨３枚を投げたとき２枚とも表になる確率が$\dfrac{1}{3}$となる解釈に相当する。これは，見かけすべてを並べておいてその中から選ぶということになるであろう。

3.4.2 おまけの問題

右のような道がある。A 地点から B 地点へ最短経路で行くとき，次の場合の確率を求めよ。



(1) P 地点を通って A 地点から B 地点へ行く確率
(2) 交差点では$\dfrac{1}{2}$の確率で道を選ぶとき，P 地点を通る確率

---

(1) A 地点から B 地点までの道は $\dfrac{8!}{5!3!} = 56$ 通り。また，P 地点を通る道は $\dfrac{3!}{2!} \times \dfrac{5!}{3!2!} = 3 \times 10 = 30$ 通り。よって求める確率は $\dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$

(2) A 地点から P 地点へ行く道 3 本のいずれを通っても，P へ到達する確率は等しく $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ゆえ，

$3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \frac{3}{8}$

間違いというのではないが，生徒が (1) と (2) の答えが違うのはなぜか聞いてきた問題である。(2) で P 地点を通る 3 つの道の確率は等確率だから，道 1 つに対する確率がすべて等しいわけでないことがわかりにくい。

3.5　同値な条件ですか？

座標平面上の点 (p, q) は，$x^2 + y^2 \leqq 8$, $y \geqq 0$ で表される領域を動く。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p+q, pq)$ の動く領域を図示せよ。

(2) (1) の範囲にある点 P と点 A(−4,4) の距離の最大値を求めよ。

---

(1) 点 (p, q) が $x^2 + y^2 \geqq 8$, $y \geqq 0$ で表される領域を動くから $\begin{cases} p^2+q^2 & \leqq 8 \cdots ① \\ q & \geqq 0 \cdots ② \end{cases}$.

ここで

$$p + q = X, pq = Y \cdots ③$$

とおいて，点 (X, Y) の動きうる範囲を D とすると，

$$\text{点 } (X, Y) \in D \iff ①, ②, ③\text{を満たす実数 } p, q \text{ が存在する} \cdots (*)$$

このとき，①, ③ から

$$X^2 - 2Y \leqq 8 \cdots ④$$

であることが必要である。

また，③から p, q は 2 次方程式

$$t^2 - Xt + Y = 0 \cdots ⑤$$

の 2 解である。そして，②から，2 次方程式⑤が少なくとも 1 つの 0 以上の解 t を持つこと (☆) が満たされれば十分である。

ここで，⑤の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f(t) = \left(t - \frac{X}{2}\right)^2 + Y - \frac{X^2}{4}$$

よって，

$$\begin{aligned} (☆) \quad &\iff \left(\frac{X}{2} \leqq 0, f(0) \leqq 0\right) \text{または} \left(\frac{X}{2} > 0, f\left(\frac{X}{2}\right) \leqq 0\right) \\ &\iff (X \leqq 0, Y \leqq 0) \text{ または} \left(X > 0, Y \leqq \frac{X^2}{4}\right) \cdots ⑥ \end{aligned}$$

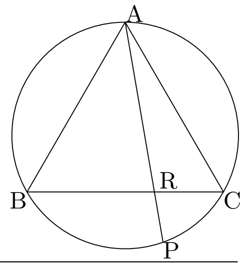
したがって，求める点 $(p+q, pq)$ の動く範囲 D は，(*) から④かつ⑥で与えられるので，図の編み目部分のようになる。

(2) 省略

これも，有名な複数の問題集の解答にあったものです。
$p+q=X, pq=Y$ とおいてしまったら，X, Y についての条件で $q \leqq 0$ などのように p, q の条件を分離できるはずがない。しかし，この結果は正しい。
写像 $(p,q) \to (p+q, pq)$ により，$p^2+q^2 \leqq 8, q \geqq 0$ で表される領域の像は，写像が p,q に関して対称であることから，$p^2+q^2 \leqq 8$ かつ ($p \geqq 0$ または $q \geqq 0$) で表される領域の像と一致する。後者の場合，上の解答で何の問題も生じない。
ちょっと問題を訂正すれば出来る問題なのに，なぜそのことを述べないのだろうか。

3.6 条件を使っていません

円に内接する四角形 ABPC は次の条件 (1),(2) を満たすとする。
(1) 三角形 ABC は正三角形である。
(2) AP と BC の交点 R は線分 BC を $p:(1-p)$ $[0<p<1]$ の比に内分する。
このとき、ベクトル$\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ。



$\angle ARB = \angle CRP, \angle ABC = \angle APC$ ゆえ， $\triangle ARB$ と $\triangle CRP$ は相似である。
$AR:RP=1:x$ とおくと，$\dfrac{1}{1-p} = \dfrac{p}{x}$ ゆえ，$x = p(1-p) = p - p^2$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = (1+x)\overrightarrow{AD} = (1+p-p^2)\{(1-p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}\}$$

これは，間違っています。まさかと思われる，$\dfrac{1}{1-p} = \dfrac{p}{x}$ が違うのです。実際には，$\dfrac{AR}{(1-p)BC} = \dfrac{pBC}{xAR}$ です。これから $x = \dfrac{BC^2}{AR^2}p(1-p)$ となります。ここで，正三角形であることを使います。ベクトルを使って簡単に $x = \dfrac{p(1-p)}{1-p+p^2}$ がわかり，最後まで行きます。
相似三角形の比は長さの比であって，比を使うことは危険ということですね。この三角形は通常の対応関係ではなく，ねじれているので問題が表面化したということです。

4 次のような問題はいかがでしょうか

4.1 $n=1$ の場合必ず成り立つの？

階差数列から元の数列を復元するとき， n=1 の場合を別に扱わなければならない。しかし，実際問題としてまとめることができなかった例に遭遇したことは無い。
　実際にまとめることが出来ないことがあるのだろうか。
この問題を何人かとメールや直接やりとりしていたら，数学セミナーに同じ問題が出て “解答” していたが，あれで反例になっているのだろうか。

4.2 答えは１つ？

次の数列の一般項を求めよ。

$$1, 3, 6, 10, 15, \cdots$$

という問題では，階差数列を使って一般項を１つだけ求めていきます。では，この数列の一般項を２つ求めることはできないのでしょうか。
実際には無限に多くの一般項を作ることが出来ます。それも凄く簡単に...。こういう事実があるものだから，群数列の問題がおかしなことになるのですよ。