数学教育における小さな宝石たち

新潟県立新発田高等学校　金沢光則

平成 13 年 8 月 3 日

1　はじめに

長いこと数学の教師をやっていると，教師同士で議論になったり，あるいは生徒と議論したりするおもしろい話題に遭遇することが沢山あります。残念ながら多くは一過性で忘れてしまうのですが，いくつか記録したものがあり，みなさんにも楽しんでいただこうと考えています。

2　生徒の質問から

先日，メネラウスの空間版ともいうべき問題を生徒から聞かれて，しばらく考えてしまいました。難しい問題の中にもおもしろいことは隠れていますが，生徒が「簡単なことなんですが...」といってくることの中にもおもしろいことがあります。

2.1　あなたならどう答えますか

(1) $3x(x+1)$ と $x(x+3)$ の最小公倍数ではなぜ 3 がとれるの？

(2) 三角形 ABC の底辺 BC を $a:b$ に内分する点を D とする。
AD の内点を P とするとき，$\triangle ABP : \triangle ACP = a:b$ となるのはなぜ？

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$ と $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$ はなぜ形が違うの？

3　あなたはこの解答で良いと思いますか

教科書や問題集だけでなく，生徒の質問や同僚との議論の中でもちょっと違うのではないかなと思うようなことがたまにあります。次の解答について，あなたはおかしいと感じることがありませんか。

3.1　貼り合わせた関数の微分可能性

関数 $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & = ax^2 + bx - 2 (x \geqq 1) \\ f_2(x) & = x^3 + (1-a)x^2 (x < 1) \end{cases}$ が $x = 1$ で微分可能となるように定数 a, b の値を定めよ。

$x=1$ で連続だから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0} f_2(x) = 1+1-a = f(1) = f_1(1) = a+b-2\\ \therefore 2a+b &= 4\\ &\text{また,}\\ \lim_{x\to 1-0} f'(x) &= \lim_{x\to 1-0} f_2(x) = 3+2(1-a) = \lim_{x\to 1+0} f'(x) = \lim_{x\to 1+0} f_1'(x) = 2a+b\\ \therefore 4a+b &= 5\end{aligned}$$

これを解いて $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$.

3.2　必要条件？

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = 2 \text{ が成り立つように定数 } a,\ b \text{ の値を求めよ。}$$

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから $\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$
ゆえに $a+b=0$ すなわち　$b=-a$.
よって

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1} = \frac{a}{2}$$

ゆえに $\dfrac{a}{2}=2$. よって $a=4$. したがって $b=-4$.
$a=4$, $b=-4$ のとき、与えられた等式が成り立つ。
よって $a=4$, $b=-4$.

3.3　厳密でない？

奇数の列を次のような群に分ける。

$$1|3,5|7,9,11|13,15,17,19|21,\cdots$$

第 n 群の初項を求めよ。

各群の初項を抜き出すと

$$1,3,7,13,21,\cdots$$

となる。階差数列を作ると

$$2,4,6,8,\cdots$$

ゆえ階差数列の一般項は $2n$
よって求める，第 n 群の初項を a_n とおくと
$n \geqq 2$ のとき，$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1+(n-1)n = n^2-n+1$.
これは $n=1$ のときも成り立つ。

3.4　同様に確からしい？

3.4.1　最初の問題

１２人の人がボールを１個ずつ持っていて，順番に A, B, C の箱のいずれかに入れていくものとする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，同名の人はなく，空の箱があっても良いものとする。

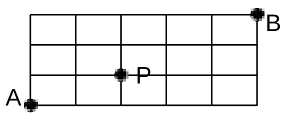
(1) ボールに自分の名前を書いて箱に入れていく場合，ボールの入り方は何通りあるか。
(2) ボールに自分の名前を書いて箱に入れていく場合，A の箱にちょうど８個のボールが入る入り方は何通りあるか。
(3) ボールに名前を書かずに箱に入れていく場合，A, B, C の箱に入ったボールの個数の組み合わせは何通りあるか。
(4) ボールに名前を書かずに箱に入れていく場合，８個以上のボールが入る箱がある確率を求めよ。

---

(1) 各ボールがどの箱に入るか，３通りずつあるので，$3^{12} = 531441$ 通り。
(2) A に入るボールの選び方は，${}_{12}C_8 = 495$ 通り。そのそれぞれに，残り４個のボールが B か C の箱に入るので $495 \times 2^4 = 7920$ 通り。
(3) 0 以上の整数 A, B, C が $A + B + C = 12$ を満たすときの解の個数と同じなので，${}_{12+2}C_2 = 91$ 通り。
(4) A に８個以上入るのは，${}_{4+1}C_1 + {}_{3+1}C_1 + {}_{2+1}C_1 + {}_{1+1}C_1 + {}_{0+1}C_1 = 15$. B，C についても同じだけあり，同じものは無いので $\dfrac{15 \times 3}{91} = \dfrac{45}{91}$

3.4.2　おまけの問題

右のような道がある。A 地点から B 地点へ最短経路で行くとき，次の場合の確率を求めよ。



(1) P 地点を通って A 地点から B 地点へ行く確率
(2) 交差点では $\dfrac{1}{2}$ の確率で道を選ぶとき，P 地点を通る確率

---

(1) A 地点から B 地点までの道は $\dfrac{8!}{5!3!} = 56$ 通り。また，P 地点を通る道は $\dfrac{3!}{2!} \times \dfrac{5!}{3!2!} = 3 \times 10 = 30$ 通り。よって求める確率は $\dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$
(2) A 地点から P 地点へ行く道３本のいずれを通っても，P へ到達する確率は等しく $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ ゆえ，$3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \dfrac{3}{8}$

3.5　同値な条件ですか？

座標平面上の点 (p, q) は，$x^2 + y^2 \leqq 8$, $y \geqq 0$ で表される領域を動く。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p + q, pq)$ の動く領域を図示せよ。

(2) (1) の範囲にある点 P と点 A$(-4,4)$ の距離の最大値を求めよ。

---

(1) 点 (p, q) が $x^2 + y^2 \geqq 8$, $y \geqq 0$ で表される領域を動くから $\begin{cases} p^2 + q^2 & \leqq 8 \cdots ① \\ q & \geqq 0 \cdots ② \end{cases}$.

ここで

$$p + q = X, pq = Y \cdots ③$$

とおいて，点 (X, Y) の動きうる範囲を D とすると，

$$\text{点 } (X, Y) \in D \iff ①, ②, ③\text{を満たす実数 } p, q \text{ が存在する} \cdots (*)$$

このとき，①, ③ から

$$X^2 - 2Y \leqq 8 \cdots ④$$

であることが必要である。

また，③から p, q は２次方程式

$$t^2 - Xt + Y = 0 \cdots ⑤$$

の２解である。そして，②から，２次方程式⑤が少なくとも１つの 0 以上の解 t を持つこと (☆) が満たされれば十分である。

ここで，⑤の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f(t) = \left(t - \frac{X}{2}\right)^2 + Y - \frac{X^2}{4}$$

よって，

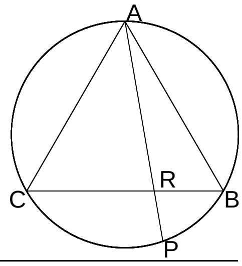
$$\begin{aligned} (☆) \quad &\iff \left(\frac{X}{2} \leqq 0, f(0) \leqq 0\right) \text{ または } \left(\frac{X}{2} > 0, f\left(\frac{X}{2}\right) \leqq 0\right) \\ &\iff (X \leqq 0, Y \leqq 0) \text{ または } \left(X > 0, Y \leqq \frac{X^2}{4}\right) \cdots ⑥ \end{aligned}$$

したがって，求める点 $(p + q, pq)$ の動く範囲 D は，(*) から④かつ⑥で与えられるので，図の編み目部分のようになる。

(2) 省略

3.6　条件を使っていません

円に内接する四角形 ABPC は次の条件 (1),(2) を満たすとする。
(1) 三角形 ABC は正三角形である。
(2) AP と BC の交点 R は線分 BC を $p : (1-p)$ $[0 < p < 1]$ の比に内分する。
このとき、ベクトル$\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ。



$\angle ARB = \angle CRP$, $\angle ABC = \angle APC$ ゆえ，　$\triangle ARB$ と $\triangle ARC$ は相似である。
$AR : RP = 1 : x$ とおくと，$\dfrac{1}{1-p} = \dfrac{p}{x}$ ゆえ，$x = p(1-p) = p - p^2$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = (1+x)\overrightarrow{AD} = (1+p-p^2)\{(1-p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}\}$$

4　次のような問題はいかがでしょうか

4.1　n = 1 の場合必ず成り立つの？

階差数列から元の数列を復元するとき，　n=1 の場合を別に扱わなければならない。しかし，実際問題としてまとめることができなかった例に遭遇したことは無い。
　実際にまとめることが出来ないことがあるのだろうか。

4.2　答えは１つ？

次の数列の一般項を求めよ。

$$1, 3, 6, 10, 15, \cdots$$

という問題では，階差数列を使って一般項を１つだけ求めていきます。では，この数列の一般項を２つ求めることはできないのでしょうか。