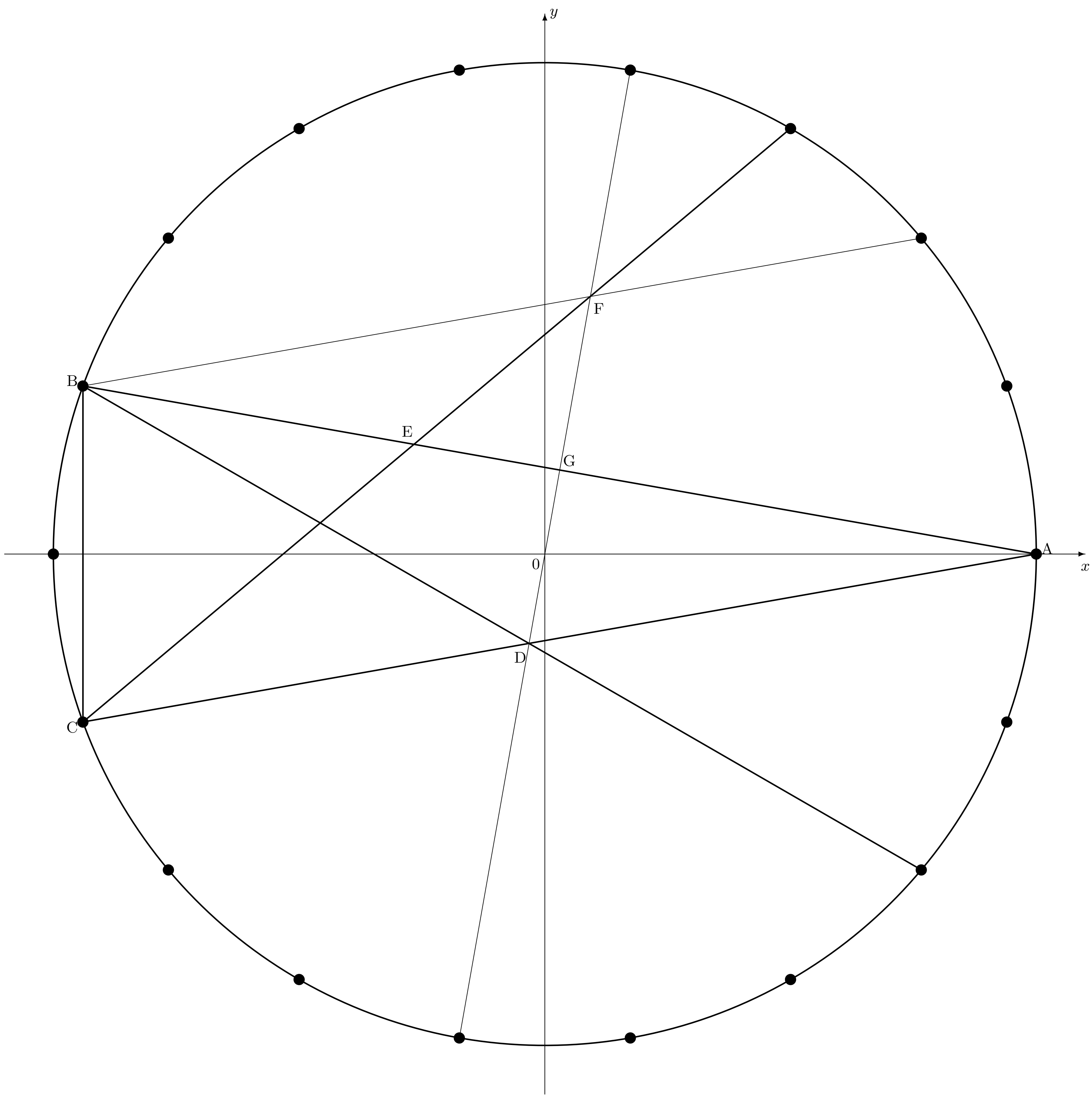


問題

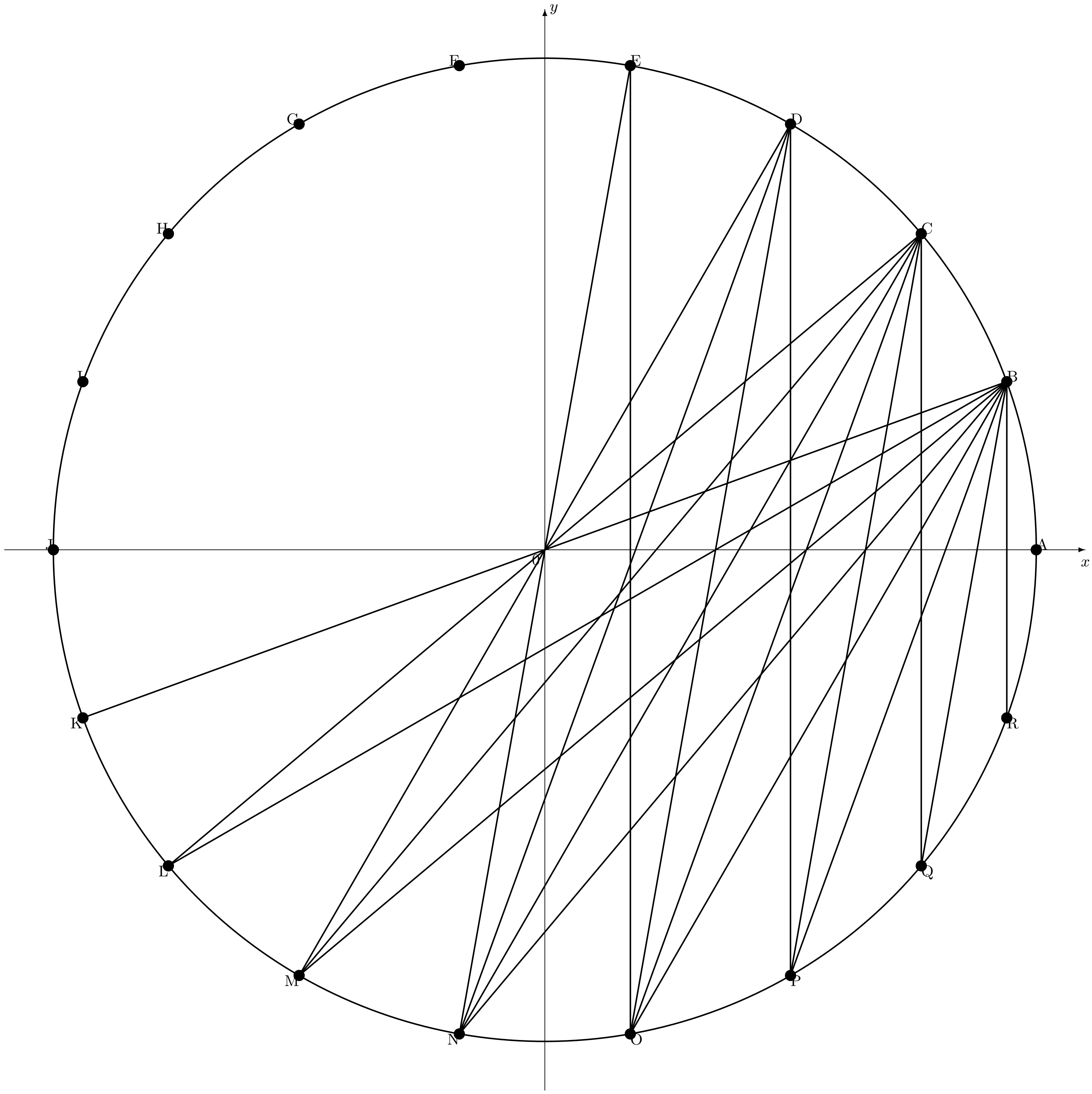
上図で、 $\triangle ABC$ は頂角が 20°の二等辺三角形である。CE を$\angle ACE$ =30°, BD を$\angle ABD$ =20°となるように引く。このとき$\angle BDE$ を求めよ。

少し前に流行った問題であるが、円の 18 等分点を使えば簡単に証明することができる。ここで一番難しいのは、三直線が点 F で交わることであるが、これはあとで証明することにする。

1 解答

$\angle BFD$ =$\angle BDF$ (=70°) ゆえ FB=DB となる。BG⊥DF ゆえ、FG=DG である。したがって EF=ED となり、$\angle EDF$ =$\angle EFD$ =40°となる。よって $\angle BDE = \angle BDF - \angle EDF = 70° - 40° = 30°$ である。

2 点 F で交わることの証明



$\zeta_k = exp(k\theta),\ \theta = 2\pi/18 = 20^\circ$ とおくとき、$\zeta_1,\ \zeta_{12}$ を結ぶ線分と実軸の交点が、$\zeta_2,\ \zeta_{14}$ を結ぶ線分と実軸の交点と一致することを示せばよい。交点を $t \in \mathbb{R}$ とおくと、$\dfrac{\zeta_{12}-t}{\zeta_1-t} = s \in \mathbb{R}$ とかける。t について解くと、$t = \dfrac{\zeta_{12}-s\zeta_1}{1-s}$ となる。分子の虚部が 0 になるので、$\sin 12\theta - s\sin\theta = 0$ となり、$s = \dfrac{\sin 12\theta}{\sin\theta}$ となる。したがって、$t = \dfrac{\sin\theta\cos 12\theta - \cos\theta\sin 12\theta}{\sin\theta - \sin 12\theta} = \dfrac{-\sin 11\theta}{\sin\theta - \sin 12\theta} = \dfrac{-2\sin\dfrac{11\theta}{2}\cos\dfrac{11\theta}{2}}{-2cos\dfrac{13\theta}{2}\sin\dfrac{11\theta}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{11\theta}{2}}{\cos\dfrac{13\theta}{2}} = \dfrac{\cos 110^\circ}{\cos 130^\circ}$ である。同様に、ζ_2 と ζ_{14} を結ぶ線分と実軸の交点は、$t = \dfrac{\cos 6\theta}{\cos 8\theta} = \dfrac{\cos 120^\circ}{\cos 160^\circ}$ となる。$\dfrac{\cos 110^\circ}{\cos 130^\circ} = \dfrac{\cos 120^\circ}{\cos 160^\circ} \iff 2\cos 110^\circ\cos 160^\circ = -\cos 130^\circ \iff \cos 270^\circ + \cos 50^\circ = \cos(180^\circ - 130^\circ)$ ゆえ、成り立つ。

2.1　終わりに

この手の問題は、円周の等分点を使えばわかると昔桑原先生が言っていたが、それを SEM の例会で話したものの、この問題は解けなかった。ED が等分点を通らない、弦が交わることを示すことが難しい。円周角にならないで、円の内部で交わるときにできる角がわからないのが原因であった。最近、子供の中 2 数学の教科書を見ていて、弦の交点が作る角は、円周角の和になるという事実が書いてあるのを見つけ、この解答を発見した。

ところで、図から、$\zeta_1\zeta_{13}$,$\zeta_2\zeta_{15}$ の交点も、$\zeta_1\zeta_{11}$,$\zeta_3\zeta_{14}$ の交点も、一致する。これに相当する式は、$\cos 120^\circ \cos 170^\circ = \cos 140^\circ \cos 130^\circ$, $\cos 120^\circ \cos 110^\circ = \cos 100^\circ \cos 170^\circ$ であり、少し変形することにより、以前の「tan の積」の中で示した式 $\sin 30^\circ \sin 2\alpha = \sin\alpha \sin(90^\circ - \alpha)$ になる。