1999/6/12 金沢光則

1　平面幾何の問題

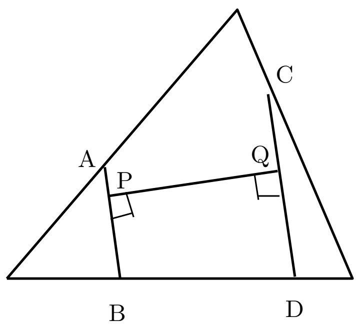
大学の入試問題集にあった平面幾何の問題である。

1.1　問題

三角形 ABC の内部に２点 P, Q がある。このとき、線分 PQ の長さは３辺 AB, BC, CA の最大値より短いことを示せ。

2　生徒の解答１

部屋割り論法を使った生徒の解答である。証明すべき部分を明らかであると主張していたが、それでもしばらく興奮してしまった。



2.1　解答

２点 P,Q を通る線分 PQ の垂線を考えると、それらは三角形の辺と交わるが、交点が４つで辺が３つなので交点のうち２点は同一辺上にある。この同一辺上にある２点は直線 PQ に関して同じ側にあるのでこの２点を結ぶ線分は PQ 以上である。この線分は辺より短いので、線分 PQ がある辺より短いことがわかった。したがって、３辺の最大辺より短いことがわかる。

3　生徒の解答２

上の解答を授業で紹介したら、こんな風にやったよと別の生徒がいってきた。この問題に限っては、こちらの方が簡単で、私の用意した方法よりうまい。
また、この問題は明らかだという人と議論したときも、この方法の方が明らかだという手順より明らかあるいは単純であった。

3.1　解答２

線分 PQ の P の側だけを伸ばし、辺にぶつかる点を D とする。D が頂点でないとき、直線 PQ と D を含む辺のなす角の小さくない方の頂点と Q を結ぶ。この頂点を A としてよい。その線分 l と PQ を比べると線分の方が長い。次に l を延長しその交点と辺の交点を E とする。E は仮定より頂点とはならない。E の周りにできる小さくない方の角側にある頂点と A を含む辺が l より長い。したがって PQ は１辺より短いので、３辺の最大値より短いことがわかる。
言葉で説明すると長いように感じるが、実際は単純である。