1997/11/17 金沢光則

1　完全順列の問題

５人の客がホテルのフロントにそれぞれコートを預け、帰りに受け取るものとする。５人全員が帰りに自分の物以外のコートを渡される場合の数を求めよ。

1.1　概論

一般に 1 から n までの数を並べた順列で、k 番目が k で無い順列を完全順列という。完全順列の個数を $W(n)$ で表すことにしよう。問題集にある解法は、樹形図を使って全ての場合を調べる方法である。参考として、

$$W(n+2) = (n+1)\{W(n+1) + W(n)\}$$
$$W(n) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

があげてあるが、難しい。あまり見かけない方法であるが、円順列などを使って具体的に計算する方法があるので紹介したい。

1.2　$n = 4$ の場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

上の段に 1 から 4 までを、下の段に完全順列を書き、これを置換と見る。これを巡回置換の積に分解する。巡回置換 $(a_1a_2\cdots a_k)$ の長さを k と呼ぶ。左の例では (12)(34), 右の例では (1234) となる。完全順列であることは、この分解に、(11) などが現れないことであるから、長さ 2 の巡回置換２つの積か、または長さ 4 の巡回置換となる。{1,2} からなる巡回置換は、{1,2} を並べた円順列ゆえ、その個数は $(2-1)!$ である。同様に、{1,2,3,4} からなる巡回置換は、{1,2,3,4} を並べた円順列ゆえ、その個数は $(4-1)! = 6$ 個ある。以上から、

$$W(4) = \frac{{}_4C_2}{2!} \times \{(2-1)!\}^2 + (4-1)! = 3 + 6 = 9$$

1.3　$n = 5$ の場合

長さ 2 と長さ 3 の巡回置換の積の場合と、長さ 5 の巡回置換の場合しかない。

$$W(5) = {}_5C_2 \times (2-1)! \times (3-1)! + (5-1)! = 20 + 24 = 44$$

1.4　$n = 6$ の場合

長さ 2 の巡回置換 3 個の積、長さ 2 の巡回置換と長さ 4 の巡回置換の積、長さ 3 の巡回置換 2 個の積、長さ 6 の巡回置換の場合しかない。

$$W(6) = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!}\{(2-1)!\}^3 + {}_6C_2 \times (2-1)! \times (4-1)! + \frac{{}_6C_3}{2!} \times \{(3-1)!\}^2 + (6-1)!$$
$$= 15 + 90 + 40 + 120 = 265$$

1.5　巡回置換への分解

1 番目のカードに a_1, a_1 番目のカードに $a_2, \cdots$ とあるとき、$1 \to a_1 \to a_2 \to \cdots$ というループができる。カードの数が有限ゆえ、このループはいつまでも続かないので、$1, a_1, a_2, \cdots$ のいずれかが出るのだが、カードには異なる数字が書かれていることから、その数は 1 であることがわかる。これにより得られるループを $(1a_1a_2\cdots a_k)$ で表すことにする。このループの中に全ての番号が現れればそれで終わりとする。まだ残っているカードがあれば、どれでも良いが残りのカードの中の 1 つから始めてループを作る。この操作も有限で終わるので、結局有限個のループ（の積）を得る。
このとき、完全順列ゆえ、どのループにも 2 つ以上の数が含まれている。