2^n の先頭に現れる数

金沢光則

平成 15 年 8 月 15 日

1　問題

2003 年８月５日に行った SEM 特別例会後の懇親会で、群馬大学の瀬山士郎先生が出された問題の１つに次がある。

問題 1.1 どんな自然数 N も適当な自然数 n を選べば 2^n の先頭の部分として現れる。

この問題を私の HP にあげておいたところ、広島の金原先生が解答を送ってこられた。了解を得て少し手を入れさせて頂いたものをこれから述べていきたい。まず証明に使う補題を述べる。

補題 1.1 任意の正の無理数 x と任意の正の実数 α に対して、自然数 $m,$ 非負整数 n が存在し、$0 < mx - n < \alpha$ を満たす。

補題 1.2 任意の正の無理数 x と任意の正の実数 β と任意の非負実数 α に対して自然数 $m,$ 非負整数 n が存在し $\alpha < mx - n < \alpha + \beta$ を満たす。

2　問題の証明

問題 1.1 は次のように言い換えられる。

定理 2.1 任意の自然数 N に対してある自然数 n と非負整数 r が存在して $N10^r \leqq 2^n < (N+1)10^r$ を満たす。

$$\begin{aligned} & N10^r \leqq 2^n < (N+1)10^r \\ \iff \quad & \log N \leqq n \log 2 - r < \log(N+1) \end{aligned}$$

ここで $\log 2$ が無理数であることは容易にわかる。したがって、補題 1.2 から直ちに成立することがわかる。あとは、補題を証明すればよい。

3　補題の証明

3.1　補題 1.1 の証明

x は無理数ゆえ、$0 \leqq mx - n < \alpha$ として示せばよい。
さらに、$0 < \alpha < 1$ として示せば十分である。
さて半開区間 $[0, 1)$ を a 等分 ($a \in \mathbb{N}$, $a \geqq 2$) する。ただし、$\dfrac{1}{a} < \alpha$ とする。

このとき、$0, x, 2x, \cdots, ax$ の小数部分を考えると、等しいものがあるか、全て異なれば $a+1$ 個が a 個の区間にあるのだからどれか 2 つが同じ区間に入る。
その 2 つの数を、$bx-[bx], cx-[cx]$ で表すと、$(b, c \in \mathbb{Z}, b>c)$
$|(bx-[bx])-(cx-[cx])|<\dfrac{1}{a}$
$\therefore |(b-c)x-[bx]+[cx]|<\dfrac{1}{a}$
よって $m=b-c, n=[bx]-[cx]$ とおけば
$0 \leqq mx-n<\dfrac{1}{a}$ または $-\dfrac{1}{a}<mx-n<0$ のいずれかが成り立つ。
前者が成り立つ場合は証明が終わる。
後者の場合、$\{k(mx-n)\}, (k=1,2,3,\cdots)$ は公差が負の等差数列で、公差 d は $-\dfrac{1}{a}<d<0$ を満たすので自然数 l が存在して $-1<l\{mx-n\}<-1+\dfrac{1}{a}$ を満たす。$0<lmx-ln+1<\dfrac{1}{a}$ となるので、lm, $ln-1$ を改めて m, n とおく。もともと $n=0$ なら $mx-n=mx>0$ ゆえ条件を満たさないので $n>0$ であった。よって、置き換えた新しい n についても $n>0$ となり、証明が終わる。

3.2 補題 1.2 の証明

$k=\min(\alpha,\beta)$ とすると、補題 1 より $0<mx-n<k \leqq \alpha, \beta$ となる自然数 m. 非負整数 n が存在する。ここで、等差数列 $\{q(mx-n)\}$ $(q \in \mathbb{N})$ を考えると、初項 $<\alpha$, $0<$ 公差 $<$ 区間の幅 ゆえどれかの項が区間 $(\alpha, \alpha+\beta)$ に入るのでそのときの qm, qn を改めて m,n とおけばよい。

4 例

先頭が 123 となるものを探してみた。
$\log 123=2.089905111$, $\log 124=2.093421685$
そこで $0<mx-n<0.0035$ となる m,n を探す。
$a=333$ として、$0<196\log 2-59=0.001879150<0.0035$ であり、
したがって $\log 123<1113(196\log 2-59)=2.091494106<\log 124$ である。
$1113 \times 196=218148$ また $1113 \times 59=65667$ ゆえ
$\dfrac{2^{218148}}{10^{65667}}=123.4508561485$ となる。
確かに先頭が 123 となる。さらにこの例では 12345 となっている。
この計算には MuPAD Light 2.5 を使用した。

5 最後に

無理数を有理数で近似する式を使うだけなら、2^n は n が負のときを含んで小数も一緒にしたとき先頭に N が現れることを示す。実際には正の部分だけで近似できたので $n \geqq 0$ とできた。当然逆に $n \leqq 0$ だけを考えても先頭に N が現れる。