K 君の問題

金沢光則

平成 14 年 11 月 17 日

1 はじめに

新潟県新発田高校理数科において実施した 2002 年度理数特論数学分野では生徒にレポート提出を課しているが，生徒の k 君が提出したレポートに，$\displaystyle\sum_{k=a}^{b} k^l$ の形の数は多くの l に対して共通因数を持つとあった。本人は MuPAD を使い，具体的にかなり多くの例について確かめたといっており，自信があるようであった。これについて，本当かと調べてみたのがこの問題の始まりである。
なお，この問題については，2002.10.3 青森県三沢市で行われた全国理数科教育研究大会の発表の中でふれている。

1.1 具体例

$$
\begin{aligned}
1+2+3+4 &= 2\cdot 5\\
1^2+2^2+3^2+4^2 &= 2\cdot 3\cdot 5\\
1^3+2^3+3^3+4^3 &= 2^2\cdot 5^2\\
1^4+2^4+3^4+4^4 &= 2\cdot 3\cdot 59\\
1^5+2^5+3^5+4^5 &= 2^2\cdot 5^2\cdot 13\\
1^6+2^6+3^6+4^6 &= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 163\\
1^7+2^7+3^7+4^7 &= 2^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 17\\
1^8+2^8+3^8+4^8 &= 2\cdot 3\cdot 31\cdot 389\\
1^9+2^9+3^9+4^9 &= 2^2\cdot 5\cdot 19\cdot 743
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1+2+3+4+5+6+7+8 &= 2^2\cdot 3^2\\
1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2 &= 2^2\cdot 3\cdot 17\\
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3 &= 2^4\cdot 3^4\\
1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4+7^4+8^4 &= 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 43\\
1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5+8^5 &= 2^4\cdot 3^3\cdot 11\cdot 13\\
1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+6^6+7^6+8^6 &= 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 17\cdot 313\\
1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+6^7+7^7+8^7 &= 2^4\cdot 3^3\cdot 17\cdot 449\\
1^8+2^8+3^8+4^8+5^8+6^8+7^8+8^8 &= 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 23\cdot 5261\\
1^9+2^9+3^9+4^9+5^9+6^9+7^9+8^9 &= 2^4\cdot 3^5\cdot 71\cdot 677
\end{aligned}
$$

2 状況

実際にベキ和の因数分解を実行するのは大変なので，$\rho(n) := \gcd\left(\sum_{k=1}^{n} k^l\ ;\ l = 1, 2, \cdots, n-1\right)$ と定義し、ベキ和からなる数列の最大公約数を調べてみた。k 君の言うとおりにすべてのベキ和が共通因数を持つわけではなかったが，かなり多くのベキ和が共通因数を持つように見えた。また，項数と次数にも関係があるように見えた。$n = 2..105$ について $\rho(n)$ の値を表にまとめると次のようになる。

表 1: $\rho(n)$ の値

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-	3	2	10	1	7	4	12	3	11	2	26	1	1	8
15	136	3	57	2	2	1	23	4	20	5	9	18	58	1	31
30	16	16	1	1	6	222	1	1	4	164	1	43	2	6	3
45	47	8	56	35	5	2	106	9	9	4	4	1	59	2	122
60	1	3	96	32	1	67	2	2	1	71	12	876	1	5	10
75	2	1	79	8	216	27	83	2	2	1	1	4	356	3	3
90	2	2	1	1	16	1552	7	21	30	1010	1	103	4	4	1

実験により次の予想を得る。これを k 君の問題と呼ぶことにする。

予想 1. $\rho(n) > 1$ の場合，次の 2 つのどちらかが成り立つ。ただし，$\sigma(n,l) := \sum_{k=1}^{n} k^l$ と定義する。

(1) $\sigma(n,l) \mod \rho(n) > 0 \iff l \mod n = 0$ であり，$\sigma(n,l) \mod \rho(n) = n$ が成り立つ。

(2) $\forall l : \sigma(n,l) \mod \rho(n) = 0$ が成り立つ。

3 一般に成立すること

共通因数があるということが不思議な点であるが，項の数が決まっていることから，次が成り立つことは明らかである。

定理 1. $n=4k,4k-1$ のとき，$\sigma(n,l)$ は偶数であり，$n=4k+1,4k+2$ のとき，$\sigma(n,l)$ は奇数である。

系 1. $\rho(n)$ が奇数 $\iff n\equiv 1,2(\mod 4\ )$

3.1 $\rho(n)$ の素因数分解

詳しく解析するために，表 1 の値を因数分解して表 2 とした。(1) が成り立つのは，実験によれば $n+1$ が素数のときであり，そのとき 表 2 から $\rho(n)$ は $n+1$ を因数に持つ。
次が成り立つ。

定理 2. p を奇素数，l を自然数とする。$p-1$ は $l-1$ を割り切らないとすると，ベキ和 $\sigma(p,l)$, $\sigma(p-1,l)$ は p で割り切れる。$p-1$ が $l-1$ を割り切るときは，ベキ和に *1* を加えると p で割り切れる。

注意 1. l が奇数なら，$\sigma(p,l)\equiv\sigma(p-1,l) \mod p$ であり，$2\cdot\sigma(p-1,l)=2\{1^l+2^l+\cdots+(p-1)^l\}=\{1^l+(p-1)^l\}+\{2^l+(p-2)^l\}+\cdots+\{(p-1)^l+1^l\}=p\{\cdots\}$
p は奇数ゆえ，ベキ和は p で割り切れる。
しかし，l が偶数のときは，これほど簡単には証明できないので，まとめて証明する。

Proof. $\mod p$ で考える。
$a\not\equiv 0$ とすると，$a^{(p-1)k}\equiv(a^{p-1})^k\equiv 1^k\equiv 1$ ゆえ，
$p-1\mid l$ なら $\sigma(p-1,l)=1^l+2^l+\cdots+(p-1)^l\equiv\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p-1\text{ 個}}=p-1\equiv-1$
$p-1\ \not|\, l$ とする。${\mathbb{Z}_p}^\times$ は巡回群だから，${\mathbb{Z}_p}^\times=\{1,a,a^2,\cdots,a^{p-2}\}$ と書ける。

$$1^l+2^l+\cdots+(p-1)^l\equiv 1^l+a^l+a^{2l}+\cdots+a^{(p-2)l}$$

であり，

$$(a^l-1)(1^l+a^l+\cdots+a^{(p-2)l})=(a^l)^{p-1}-1=(a^{p-1})^l-1\equiv 1^l-1=0$$

$p-1\ \not|\, l$ ゆえ $a^l\not\equiv 1$ であり，$\mathbb{Z}_p$ は体なので，$1^l+a^l+\cdots+a^{(p-2)l}\equiv 0$ となる。よって，$\sigma(p-1,l)\equiv 0$ となる。 □

素数 p と $\sigma(pm,l)$ については，

$$1^l+2^l+\cdots+p^l+(p+1)^l+\cdots+(2p)^l+\cdots+(mp)^l\equiv m(1^l+2^l+\cdots+p^l) \mod p$$

ゆえ，次が成り立つ。

注意 2. p を素数，$m\in\mathbb{N}$ とするとき，

$$\sigma(p\cdot m-1,l)\equiv\sigma(p\cdot m,l)\equiv m\cdot\sigma(p,l)\equiv m\cdot\sigma(p-1,l) \mod p$$

これを繰り返して適用して次を得る。

注意 3.

$$p^{n-1}m\mid\sigma(p^n\cdot m,l),\sigma(p^n\cdot m-1,l)$$

4 具体例

4.1 $\sigma(2,l)$

$\sigma(2,l)=\sigma(3-1,l)$ は，$l\leqq 2$ のときは 3 で割り切れるが，一般には， 3 で割り切れない。$\sigma(2,1)=3$ ゆえ，$\rho(2)=3$ だが，l に依らない共通因数はない。

4.2　$\sigma(3,l)$

$\sigma(3,l) = \sigma(4-1,l) = \sigma(2^2-1,l)$ は，$l \leqq 3$ のときは 3 で割り切れない。一般に，2 で割り切れる。$\sigma(3,1) = \dfrac{3\dot{4}}{2} = 6$ ゆえ，$\rho(3) = 2$ であり，これは l に依らない共通因数である。

4.3　$\sigma(4,l)$

$\sigma(2^2,l) = \sigma(5-1,l)$ は，$l \leqq 4$ のときは 5 で割り切れるが，一般には割り切れない。しかし 2 では割り切れる。$\sigma(4,1) = \dfrac{4\dot{5}}{2} = 10$ ゆえ，$\rho(3) = 10$ であるが，l に依らない共通因数は 2 である。

4.4　$\sigma(5,l)$

$\sigma(5,l) = \sigma(6-1,l)$ は，$l \leqq 5$ のときは 5 で割り切れず，$l = 2$ で 2 で割れなく，$l = 3$ で 3 で割れない。よって，$\rho(5) = 1$ であり，共通因数はない。

4.5　$\sigma(6,l)$

$\sigma(6,l) = \sigma(7-1,l)$ は，$l \leqq 6$ のときは 2 でも 3 でも割り切れず，$\rho(6) = 7$ であるが，共通因数はない。

4.6　$\sigma(7,l)$

$\sigma(7,l) = \sigma(2^3-1,l)$ は，$\sigma(7,1) = \dfrac{7 \cdot 8}{2} = 7 \cdot 4$ ゆえ，$\sigma(7,1) = 4$

4.7　$\sigma(8,l)$

$\sigma(2^3,l) = \sigma(3^2-1,l)$ は，$\sigma(8,1) = \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 4 \cdot 9$ ゆえ，共通因数は $\rho(8) = 4 \cdot 3 = 12$.

4.8　$\sigma(9,l)$

$\sigma(3^2,l) = \sigma(2 \cdot 5 - 1,l)$ は，$l \leqq 8$ までの共通因数に $2, 5$ は無く，l に無関係に 3 を持つ。$\sigma(9,1) = \dfrac{9 \cdot 10}{2} = 9 \cdot 5$ ゆえ，$\rho(9) = 3$ で，これが共通因数である。

5　まとめ

$rho(n)$ を $l = 1..(n-1)$ までの最大公約数としたことは，$n+1$ が素数でないときを見ると余りいい定義ではなかったが，その定義をしたおかげで，全体像が見えてきたように思う。

表 2: $\rho(n)$ の値

MuPAD において，例えば `factor(gcd(sum(k^l,k=1..n)$l=1..n-1))$n=401..410` として得られる

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	3	2	$2\cdot 5$	1	7	2^2	$2^2\cdot 3$	3	11
10	2	$2\cdot 13$	1	1	2^3	$2^3\cdot 17$	3	$3\cdot 19$	2	2
20	1	23	2^2	$2^2\cdot 5$	5	3^2	$2\cdot 3^2$	$2\cdot 29$	1	31
30	2^4	2^4	1	1	$2\cdot 3$	$2\cdot 3\cdot 37$	1	1	2^2	$2^2\cdot 41$
40	1	43	2	$2\cdot 3$	3	47	2^3	$2^3\cdot 7$	$5\cdot 7$	5
50	2	$2\cdot 53$	3^2	3^2	2^2	2^2	1	59	2	$2\cdot 61$
60	1	3	$2^5\cdot 3$	2^5	1	67	2	2	1	71
70	$2^2\cdot 3$	$2^2\cdot 3\cdot 73$	1	5	$2\cdot 5$	2	1	79	2^3	$2^3\cdot 3^3$
80	3^3	83	2	2	1	1	2^2	$2^2\cdot 89$	3	3
90	2	2	1	1	2^4	$2^4\cdot 97$	7	$3\cdot 7$	$2\cdot 3\cdot 5$	$2\cdot 5\cdot 101$
100	1	103	2^2	2^2	1	107	$2\cdot 3^2$	$2\cdot 3^2\cdot 109$	1	1
110	2^3	$2^3\cdot 113$	1	1	2	$2\cdot 3$	3	1	2^2	$2^2\cdot 11$
120	11	1	2	$2\cdot 5^2$	$3\cdot 5^2$	$3\cdot 127$	2^6	2^6	1	131
130	2	2	1	3^2	$2^2\cdot 3^2$	$2^2\cdot 137$	1	139	2	2
140	1	1	$2^3\cdot 3$	$2^3\cdot 3$	1	7	$2\cdot 7$	$2\cdot 149$	5	$5\cdot 151$
150	2^2	$2^2\cdot 3$	3	1	2	$2\cdot 157$	1	1	2^4	2^4
160	3^3	$3^3\cdot 163$	2	2	1	167	2^2	$2^2\cdot 13$	13	3
170	$2\cdot 3$	$2\cdot 173$	1	5	$2^3\cdot 5$	2^3	1	179	$2\cdot 3$	$2\cdot 3\cdot 181$
180	1	1	2^2	2^2	1	1	2	$2\cdot 3^2$	3^2	191
190	2^5	$2^5\cdot 193$	1	1	$2\cdot 7$	$2\cdot 7\cdot 197$	3	$3\cdot 199$	$2^2\cdot 5$	$2^2\cdot 5$
200	1	1	2	2	1	3	$2^3\cdot 3$	2^3	1	211
210	2	2	1	1	$2^2\cdot 3^2$	$2^2\cdot 3^2$	1	1	2	2
220	1	223	2^4	$2^4\cdot 3\cdot 5$	$3\cdot 5$	227	2	$2\cdot 229$	1	1
230	2^2	$2^2\cdot 233$	3	3	2	2	1	239	2^3	$2^3\cdot 241$
240	11	$3^4\cdot 11$	$2\cdot 3^4$	$2\cdot 7$	7	1	2^2	2^2	5^2	$5^2\cdot 251$
250	$2\cdot 3$	$2\cdot 3$	1	1	2^7	$2^7\cdot 257$	1	1	2	$2\cdot 3$
260	3	263	2^2	2^2	1	1	2	$2\cdot 269$	3^2	$3^2\cdot 271$
270	2^3	2^3	1	5	$2\cdot 5$	$2\cdot 277$	1	3	$2^2\cdot 3$	$2^2\cdot 281$
280	1	283	2	2	1	1	$2^4\cdot 3$	$2^4\cdot 3\cdot 17$	17	1
290	2	$2\cdot 293$	7	7	2^2	$2^2\cdot 3^2$	3^2	1	$2\cdot 5$	$2\cdot 5$
300	1	1	2^3	2^3	3	$3\cdot 307$	2	2	1	311
310	2^2	$2^2\cdot 313$	1	3	$2\cdot 3$	$2\cdot 317$	1	1	2^5	2^5
320	1	1	$2\cdot 3^3$	$2\cdot 3^3\cdot 5$	5	1	2^2	2^2	1	331
330	2	$2\cdot 3$	3	1	2^3	$2^3\cdot 337$	13	13	2	2
340	3	$3\cdot 7^2$	$2^2\cdot 7^2$	2^2	1	347	2	$2\cdot 349$	5	$3^2\cdot 5$
350	$2^4\cdot 3^2$	$2^4\cdot 353$	1	1	2	2	1	359	$2^2\cdot 3$	$2^2\cdot 3\cdot 19$
360	19	11	$2\cdot 11$	2	1	367	2^3	$2^3\cdot 3$	3	1
370	2	$2\cdot 373$	1	5^2	$2^2\cdot 5^2$	2^2	3^2	$3^2\cdot 379$	2	2
380	1	383	2^6	2^6	1	3	$2\cdot 3$	$2\cdot 389$	1	1
390	$2^2\cdot 7$	$2^2\cdot 7$	1	1	$2\cdot 3$	$2\cdot 3\cdot 397$	1	1	$2^3\cdot 5$	$2^3\cdot 5\cdot 401$
400	1	1	2	$2\cdot 3^3$	3^3	1	2^2	$2^2\cdot 409$	1	1