自然対数の底 e は無理数である

金沢光則

平成 12 年 2 月 6 日

1 始めに

e が無理数であることを、e の無限展開 $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$ を使うと、入試にも出そうなくらい、高校生でもわかる程度に、簡単に証明できる。あるいはもう出ているかな^^;
この方法を紹介しよう。

2 証明

$k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$[k!e] = k!\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!} \tag{1}$$

が成り立つとする。ただし、$[n]$ は n を越えない最大の整数を表す。
もし、e が有理数ならば、$e=\dfrac{b}{a}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ と書いておく。$k=b$ とすると、

$$b!e = (b-1)!a \in \mathbb{N} \qquad \therefore [b!e] = b!e$$

しかし、

$$[b!e] = b!\sum_{j=0}^{b}\frac{1}{j!} < b!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = b!e$$

ゆえ、矛盾である。
したがって、(1) を示せばよい。
(1) の右辺が自然数であることに注意すれば、

$$k!\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j!} < 1$$

が成り立つことを示せばよい。

これは、次のようにして示すことができる。

$$
\begin{aligned}
k! \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} &= \frac{k!}{(k+1)!} + \frac{k!}{(k+2)!} + \frac{k!}{(k+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \cdots \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] G. トス著/蟹江幸博訳, 数学名所案内 上, シュプリンガー・フェアラーク東京, ISBN 4-431-70854-5 , 2700 円