金沢光則

1　不定積分の公式

1.1　問題

不定積分の公式に次がある。

1. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha\text{は実数}, \alpha \neq -1)$
2. $\displaystyle\int x^{-1}dx = \log|x| + C$

なぜ、右辺が違う形なのかと当時の 2 年生に質問された。生徒の新鮮な感性に感動したものである。教科書の内容について考えるきっかけとなった問題である。

1.2　考察

上の方の式で単純に $\alpha \to -1$ とすると $x \neq 0$ のとき極限値がなく ($\pm\infty$)、とても一致するようには見えない。
不定積分でなく、定積分を考えるとはっきりするのだが、まずはよく知られた不定積分の問題点を 1 つあげておく。

1.2.1　不定積分の問題点

$f(x) = \begin{cases} \log|x| + 1 & (x > 0) \\ \log|x| + 2 & (x < 0) \end{cases}$ の導関数は $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ である。
したがって、$\displaystyle\int \log|x|dx = \frac{1}{x} + C$ というのは正確には間違いであり、

$$\int \log|x|dx = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + C_1 & (x > 0) \\ \dfrac{1}{x} + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

というのが正しいのであろう。
不定積分は本質的には微分であって局所的な性質を表しているにすぎないのである。
最も、高校では不定積分とは、微分演算の逆として与えられているが、これは本当は原始関数と呼ばれるものであって、本当の不定積分は、

$$\int_a^x f(t)dt$$

となるのもである。積分区間が変数で与えられるために、**不定**積分と呼ばれるわけである。

1.2.2 問題の定積分版

そこで本来の意味での不定積分（積分区間が変数で与えられる定積分）で問題を表現してみる。

1. $\displaystyle\int_1^x s^t ds = \frac{1}{t+1}(x^{t+1}-1)$ (t は実数, $t \neq -1$)
2. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{s} ds = \log x$

こう定式化してみると、

$$\lim_{t\to -1}\frac{1}{t+1}(x^{t+1}-1) = \lim_{t\to -1}\frac{x^{t+1}-1}{t-(-1)}$$

は、関数 $f(t)=x^t$ (注意：x は正の定数で t が変数) の $t=-1$ における微分係数に一致するから

$$\lim_{t\to -1}\frac{1}{t+1}(x^{t+1}-1) = x^{t+1}\log x\Big|_{t=-1} = \log x$$

となって、めでたく一致することがわかる。
グラフで考えると、様子がよくわかる。
定積分で考えたときは、点 (1,0) を固定して考えており、不定積分では、ここが動くのでまともに評価できていないのである。この積分定数が無限に発散するという点は、$\log|x|$ の積分も同じである。

1.2.3 $\log|x|$ の場合

$t>0$ とすると、

$$\int_{-1}^t \log|x|dx \;=\lim_{u\to -0}\int_{-1}^u \log|x|dx + \lim_{s\to +0}\int_s^t \log|x|dx \;=\lim_{u\to -0}\frac{1}{u}+\frac{1}{t}-\lim_{s\to +0}\frac{1}{s} \;=-\infty$$

このせいで、$t=0$ をはさんで積分定数が変わるのである。

1.3 積分と極限の交換可能性

なぜこの様な質問が出たのかと考えると、

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

と判然と考えているからではないだろうか。高校の範囲では扱う関数が狭いのでこの様な感じを持つかもしれない。それをきちんと認識すればすばらしいことである。さらに、この問題が、その先に進むときのきっかけ、それほど明らかなことではないのかもしれない、になればよいと思う。