数列と初項

新津高等学校　金沢光則

平成 21 年 2 月 9 日

1　はじめに

階差数列から元の数列を復元するとき、$n = 1$ の場合について言及しなくてもよい方法を大阪女学院高校の片岡先生から教わった。その事実を軸に、今まで数列の初期値について考えてきたことと、新しく気づいたことを簡単にまとめてみた

2　教科書で扱う項目

初項を特別扱いする場合もしない場合も有るが、ここでは次の 4 つの教材について考える。

和と一般項, 階差数列から元の数列を復元する、群数列、ハイブリッド数列の和

2.1　和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が n の式で与えられたとき、a_n を求めるのに普通次の関係式を使う。

$$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1}$$

a_n の式が 2 本になっているが、実は 1 本になることも多く、$n \geqq 2$ でしか成立を保証されていない後者の式が $n = 1$ のときに成り立つことを証明することで後者の式を a_n とすることが多い。
式をまとめて 1 本にすることができる同値条件は明らかに、形式的に $S_0 = 0$ が成り立つことである。しかし、この事実にふれている出版物はわずかである。

2.2　群数列

昔群数列は、群の項数をきちんと与えて、そこから厳密に求めたものであったが、最近は群の項数を与えないことも多く、群の初項を推測させてそれを用いて計算させるような問題まであり、あきれている。
文系の生徒に問題を解かせていると、まさにあきれたその方法を使った場合だけある程度できるが、本当のやり方を示してもものになる生徒は少ない。
群数列を計算するとき、第 N 群の初項を求めるのは、各群の項数を $\{c_n\}$, 最初から通した数列を $\{a_n\}$ とすると、a_N, $N = \sum_{k=1}^{n-1} c_k + 1$ とする。これは $n = 1$ のとき問題があるので、第 N 群の初項でなく末項を使うべきだと考えている。$N = \sum_{k=1}^{n} c_k - c_n + 1$ という手もある。これが今回教わった式の発想の原点だそうだ。
もっとも、群数列については、問題の厳密さが薄れているので、余り面倒なことを言ってもしょうがない。

2.3　ハイブリッド数列

等差数列と等比数列の一般項の積を一般項に持つ数列の和を考える。
ここでは、$a_n = (3k+1)\cdot 2^n$ とする。
通常の計算では、$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおき、次のように計算する

$$
\begin{aligned}
S_n - 2S_n &= \sum_{k=1}^{n}(3k+1)\cdot 2^k - \sum_{k=1}^{n}(3k+1)\cdot 2^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(3k+1)\cdot 2^k - \sum_{k=2}^{n+1}(3k-2)\cdot 2^k \\
&= 4\cdot 2^1 + \sum_{k=2}^{n} 3\cdot 2^k - (3n+1)\cdot 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

ここでも、最下行の中間項が、$n=1$ のとき存在しないことについての注意をしないことが普通である。

2.3.1　特性方程式

数研通信 N62 に次の計算がある。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k+1)3^k &= \sum_{k=1}^{n}(k3^k - (k-1)3^{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k3^k - \sum_{k=0}^{n-1} k3^k \\
&= n3^n
\end{aligned}
$$

上の例をこの方法で計算することができる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(3k+1)2^k &= \sum_{k=1}^{n}((3k-2)2^{k+1} - (3k-5)2^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(3k-2)2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}(3k-2)2^{k+1} \\
&= (3n-2)2^{n+1} + 4
\end{aligned}
$$

一般には、

$$
(ak+b)r^k = (Ak+B)r^k - (A(k-1)+B)r^{k-1}
$$

とおいて、A, B について解くと、

$$
A = \frac{ar}{r-1},\quad B = \left(b - \frac{a}{r-1}\right)\frac{r}{r-1}
$$

$r \neq 1$ すなわち、ハイブリッド数列であれば、必ずこの値は存在し、

$$
\sum_{k=1}^{n}(ak+b)r^k = (An+B)r^n - B
$$

となる。

2.4 階差数列

階差数列 $\{b_n\}$ が与えられたとき、元の数列 $\{a_n\}$ を復元する方法として

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

を使うように教科書には書いてある。この式は、$n \geqq 2$ でしか成り立たないので、$n=1$ の場合にも成り立つかどうか調べる必要がある。
私が出会ったすべての数列の中で、$n=1$ の場合に成り立たない例は存在しなかった。であう式は整式であったり、指数関数であったり、あるいはそれらの混合したものであったりするが、それらの場合はもちろん成り立っている。この事実に気づいて、証明しようとした先生は、私以外にもたくさんいたが、私が受け入れることのできる証明に出会ったことはない。
かつて、他県の教師が、「成り立たない例は経験から存在しないのだから、$n=1$ の場合に言及する必要は無いのではないか」と言っていたのを聞いて愕然としたものである。
また、数学セミナーに、成り立たないという反例が上がっていたが、式として書けるという部分が考慮されておらず、全く反例とはいえないものであった。
今回教えていただいた方法とは

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_n$$

である。これは、すべての自然数 n に対して成立している。
階差数列を「立木算」と理解すると、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の間に存在する階差を加えることにより元の数列を復元すると理解するのが自然であり、a_{n+1} までの間の階差を加えてから最後の階差を引くというのはわかりにくい。
しかし、5 から 10 までに整数はいくつあるかと問えば、$10-5+1$ であり、$10-(5-1)$ と考えることもある。後者では立木とその間をセットにして考える（したがって、「その間」でないものが１つ混じる）ことによるから、上の考え方は決して特異ではない。

2.5 実際に使ってみよう

様子を理解するために、次の数列の一般項を求めてみよう。

　　0, 4, 18, 48, 100, 180, 294, $\cdots$

2.5.1 末項を調整する

階差数列を $\{b_n\}$ とすると、$b_n : 4, 14, 30, 52, 80, 114, \cdots$
第二階差数列を $\{c_n\}$ とすると、$c_n : 10, 16, 22, 28, 34, \cdots$
$\{c_n\}$ は初項が 10, 公差が 6 の等差数列なので、$c_n = 10 + 6(n-1) = 6n+4$
$\{b_n\}$ の階差数列が $\{c_n\}$ なので、

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n} c_k - c_n \\
&= 4 + \sum_{k=1}^{n} (6k+4) - (6n+4) \\
&= 4 + 3n(n+1) + 4n - 6n - 4 = 3n^2 + n \\
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_n = 0 + \sum_{k=1}^{n} (3k^2+k) - (3n^2+n) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n(3n+1) \\
&= n(n+1)^2 - n(3n+1) = n^2(n-1)
\end{aligned}
$$

2.5.2　初項を調整する

上の話題を本校の石塚先生に話していたとき、これはどうかと提案された idea が次である。
第二階差数列を $c_n = 6n+4$ $(n \geqq -1)$ と考える。したがって、$b_{-1} = 2,\ b_0 = 0,\ a_0 = 0$ とする。

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{-1} + \sum_{k=-1}^{n-1} c_k \\
&= 2 + \sum_{k=-1}^{n-1} (6k+4) \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n+1} (6k-8) \\
&= 2 + 3(n+1)(n+2) - 8(n+1) = 3n^2 + n \ (n \geqq 0) \\
a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \\
&= 0 + \sum_{k=0}^{n-1} (3k^2+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{3(k-1)^2 + (k-1)\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{3k^2 - 5k + 2\} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{5n(n+1)}{2} + 2n \\
&= n(n+1)(n-2) + 2n \\
&= n^2(n-1) \ (n \geqq 1)
\end{aligned}
$$

2.5.3　現実的か

2 年生のときはきちんと $n=1$ の場合分けをしていた生徒も、文系の生徒を中心に、場合分けをすることをすっかり忘れている。

だからといって、上にあげた計算がしっかりできる生徒は、やっぱり $n=1$ の場合分けについてしっかりやっているだろう。

2.6 証明の試み

階差数列を使って復元した数列を表す $n \geqq 2$ で成り立つ式は、$n=1$ のときも成り立つことを証明したい。関係式 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_n$ を使って、証明を試みてみよう。

定理 2.1 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ を n の式 $f(n)$ で表したとき、この式は *2* 以上の自然数 n に対して意味を持つが、形式的に $n=1$ のとき *0* となる。

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_n (= f(n+1) - a_n)$$

とおけば、$n \geqq 2$ のとき $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ に一致し、さらに $g(1) = 0$ となる。したがって、定理の主張を満たす式が 1 つは存在する。
すべての自然数 n に対して定義された式 $f(n)$ があり、$n \geqq 2$ の自然数 n に対して $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ となると仮定する。$f(n) + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1)$ であり、左辺、右辺とも任意の自然数に対して定義され、2 以上の自然数に対して一致する。したがって、左辺 $-$ 右辺を考えると、$c, 0, 0, 0, \cdots$ という数列で n の式で表された数列が存在する。ところが、$c \neq 0$ の場合このような数列は存在しない。

注意 2.2 初項 $c \neq 0$, 公比 *0* の等比数列 $c \cdot 0^{n-1}$ *(*ただし $0^0 = 1$*)* を認めるならば、反例があることになる。

注意 2.3 $x = \pm k$ *(*k は *0* でない整数*)* で *0* になる式 $\frac{\sin \frac{x}{\pi}}{\frac{x}{\pi}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (\frac{x}{k\pi})^2)$ を式として認めるなら、反例は存在する。

注意 2.4 式として極限を含む式を考えると、

$$\lim_{m \to 0} (n-k)^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} 0 & (n = k) \\ 1 & (n \neq k) \end{cases}$$

を使えば、有限個の点の場合分けを *1* 本の式で現すことができる。従って、*1* 本の式という制限は意味がない。

注意 2.5 任意の長さが n 個の有限数列は、無限に多くの異なる多項式を一般項として持つ。

注意 2.6 $\sum_{k=1}^{0} a_k$ を、「k の範囲を満たす数が存在しないから *0* とする」と決めるのはかまわないが、「*0* になる」と考えるのは正しくない。

3　終わりに

一致の定理に似ていると感じていた。多項式関数は、次数に依存した解しか持たない。解析関数には一致の定理がある。
実数あるいは複素数上の関数で、任意の自然数に対して一致すれば関数として一致するかと問うたときは、それは違うということになる。
この問題は、高校現場で扱う「式」が狭いために起きている偶然のような気もしてきている。