不等号の性質

金沢光則

平成 15 年 11 月 28 日

新課程になって、不等式が中学校で扱われず、高校にやってきた。そのためであろうか、東京書籍数学▪では次のように扱っている。

東京書籍 数学▪ (新課程)

実数 a に対しては、$a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ のどれか一つが必ず成り立つ。また、実数 a, b に対して、次のことが成り立つ。

$a > 0, \quad b > 0 \quad \to \quad a + b > 0, \quad ab > 0$

実数 a, b に対して $a > b \quad \leftrightarrow \quad a - b > 0$ とする。

このことから次の性質を導くことができる。

- $a > b, b > c \to a > c$
- $a > b \to a + c > b + c$
- $a > b, c > 0 \to ac > bc, a/c > b/c$
- $a > b, c < 0 \to ac < bc, a/c < b/c$

他の教科書では次のように扱われている。

数研出版 新編 数学▪ (新課程)

２つの実数 a, b については、$a > b$, $a = b$, $a < b$ のどれか一つの関係だけが成り立つ。また、実数の大小関係について、次の基本性質が成り立つ。

- $a > b, b > c \quad \to \quad a > c$
- $a > b \quad \to \quad a + c > b + c, \quad a - c > b - c$
- $a > b, c > 0 \quad \to \quad ac > bc, \quad a/c > b/c$
- $a > b, \quad c < 0 \quad \to \quad ac < bc, \quad a/c < b/c$

ところで、昔の教科書では次のように扱われていた。

東京書籍 数学 A(旧課程)

２つの実数 a, b については、$a > b$, $a = b$, $a < b$ のどれか一つの関係だけが成り立つ。また、実数の大小関係について、次の基本性質が成り立つ。

- $a > b, b > c \quad \rightarrow \quad a > c$
- $a > b \quad \rightarrow \quad a + c > b + c$
- $a > b, c > 0 \quad \rightarrow \quad ac > bc$

昔のスタイルが当たり前だったので、「えぇー」という感じがあったが、考えてみれば正負の数の概念はあるわけだから、それを使って不等号を拡張した方が分かり易いようにも思う。そうだとすると、ベースにおいた性質が納得しやすいだけでなくその数が少ないというのはとても良いように感じた。
歴史的にも、負の数の認知は虚数の認知と時期が離れていないので、歴史的認知もこのようなものだったのかも知れない。
気になったので順序体の定義をあげておく

裳華房 数学選書 6 可換体論 永田雅宜 昭和 50 年 2 月 20 日発行

第５章　実体５．１　順序体、実体、実閉体
　体 K が順序体であるとは、K が体であるばかりでなく、全順序集合になっていて、算法が次の条件を満たすときにいう。(a,b,c,d は K の任意の元)

1. $a \geqq b, c \geqq d \Rightarrow a + b \geqq b + d.$
2. $a \geqq b \Rightarrow -a \leqq -b.$
3. $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$

これを見るとわかるように、$a > 0, b > 0$ ならば $ab > 0$ という性質を基礎におくことは自然である。
さらに、全順序集合でなく、0 との大小を基本にすることで、複素数体が順序体でないことが分かり易くなって良いように思う。