1997/11/23 金沢光則

1　不等式の証明

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^2 + 2x + 4 > 0$$

1.1　解答例

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 &> 0 \\ (x+1)^2 + 3 &> 0 \end{aligned}$$

これは成り立っている。よって、$x^2 + 2x + 4 > 0$ が成り立つ。

1.2　何が問題か

通常では、この解答には 0 点が与えられるだろう。数学では、説明が無いときは、上から下へ論理が流れる、つまり、それぞれの式の前に、$\therefore$ を補って読むからである。このように補っていったとき、証明として正しい流れは下から上へであり、その逆ではない。
しかし、この解答が、「次の不等式を解け。」として与えられたらどうであろうか。

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 &> 0 \\ (x+1)^2 + 3 &> 0 \end{aligned}$$

これは、全ての実数 x について成り立っている。よって、解は実数全体である。
実数全体が解であることを確認すれば、証明されたと考えて良いのではないか？
この混乱の元は、「解く」ということばにあるように思う。「解く」という作業は、「解だとすれば」つまり、必要条件を求めていく試行の連鎖であるにもかかわらず、多くの場面で、「逆にたどれる」場合が多いため、何となく「逆にたどれる」ことを当然と思ったり、無視したり、思いを馳せなかったりする、ということではないだろうか。
このように考えると、恒等式、絶対不等式と方程式、不等式の違いが、単に「証明せよ」と「解け」の違いしか無いという主張が重く感じられてくる。
結局、評価は、その答案を見て感じたとおり、つまりは直感で判断するしかないのだろうか。
もしそれが正しいのだとした場合、恒等式や絶対不等式を、どう教えていったらよいのだろう。