1　はじめに

　群数列の解答に $n \geqq 2$ が無い場合があって、それが気になっていたとき、気付いた話です。
等差数列と等比数列の一般項の積を一般項に持つタイプの数列の和の話です。
今手元にある数研出版の数学Aからとります。

2　問題

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$$

2.1　教科書にある解答

求める和を S とすると

$$\begin{array}{rl} S= & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} \\ 3S= & \qquad 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n \end{array}$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned} -2S &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n \\ &= 1 \cdot 1 + 2(3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{3(3^{n-1} - 1}{3-1} - (2n-1) \cdot 3^n \\ &= 1 + 3^n - 3 - (2n-1) \cdot 3^n \\ &= -3^n(2n-2) - 2 \end{aligned}$$

よって

$$S = 3^n(n-1) + 1$$

2.2　問題点

辺々を引いた上の計算の２行目

$$1 \cdot 1 + 2(3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n$$

の第２項は $n = 1$ のとき存在しない。
S_n がわかったとき a_n を求めるときと同じ構造がある。S_n のとき $n = 1$ の場合を別に扱うのだから、この場合 $n = 1$ の場合を無視するのはまずいのではないだろうか。
辺々を引いた上の計算の２行目を

$$-1 \cdot 1 + 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n$$

とすれば、明らかといっても通るかもしれませんね。