

天国の門はどっちだ

金沢光則

平成 15 年 11 月 29 日

教室で最近パズルが流行っていて、生徒が次の問題を考えていた。

問題

目の前に池があるが、その水が飲めるかどうかわからない。それを知っている人はいる。さらに、その人は、常に正しいことを答えるか、あるいは常に嘘を答えるかのどちらかであることがわかっている。この池の水が飲めるかどうか、その人に、はい、いいえで答えられる質問を 1 回だけしても良い。どんな質問をすれば、この池の水が飲めるかどうかわかるだろうか。

ある生徒は、真理表を持ち出して難しい答を出していた。もう一人は、分かり易い答

「もし私があなたにこの水は飲めますかと聞いたら、あなたははいと答えますか。」

を主張していた。そういえば前の学校でも、似たような問題を文化祭で出したときうまい答をしていた生徒がいたが、どうしてそうなるのだろうか、不思議であった。そのときの問題は次の通りである。

問題

道を歩いていると、道が 2 つに別れそのそれぞれの道に番人がいた。そして、立て札に次のように書いてあった。片方の道は天国に続き、他方は地獄に続いている。門番のうち 1 人は本当のことを、他方は嘘しか言わない。YES か NO で答えられる質問を 1 回だけすることができる。

上の問題と同じような聞き方もできるが、番人が二人いるので次のように聞くこともできる。

「こちらの道が天国に続いているか、向こうの番人に聞いたらはいと答えますか？」

門番二人のフィルターを通すので、必ず正しい道の情報が逆になって現れる。したがって、いいえという答ならこの道を行き、はいという答ならあちらの道を行けばよい。

ああそうか。前の例では、同じ人のフィルターを二度かけるから、その人が嘘つきでも正直者でも、飲めるかどうかの真実がそのまま現れる訳か。

論理計算をしてみよう。

人が本当のことを言うかうそを言うかによって P を 1,0 とする。また水が飲めるかどうかによって W を 1,0 とする。このとき X となるように質問を作ることができれば、P に従って回答するのだから、正しい回答 W を得たことになるのである。

P	W	X
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$X \equiv P \Leftrightarrow W \equiv (\neg P \vee W) \wedge (P \vee \neg W) \equiv (\neg P \wedge \neg W) \vee (P \wedge W)$$

である。これを素直に読めば、次のようになる。

あなたは嘘つきでしかもこの水は飲めないか、または、あなたは正直者でこの水は飲めるかのどちらかですね。

しかしこれではいかにもわかりにくい。 $X \equiv P \Leftrightarrow W \equiv P \Rightarrow W \wedge \neg P \Rightarrow \neg W$ と考えると、 $P \Leftrightarrow W$ が真実 W を P のフィルターを通して得られた真偽となる。(しかし同値という感じではないよなあ。) したがってそのフィルターの効果を打ち消して真実 W を白日の下にさらすには、 $P \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow W)$ をとるのが良い。「この水が飲めるか、あなたに聞いたらはいと答えるか」である。実際これは W と同値である。 $(P \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow W)) \equiv (P \Leftrightarrow P) \Leftrightarrow W \equiv T \Leftrightarrow W \equiv W$ だが、これも変な感じがするなあ。) 直感的にこの解答を得る生徒は、フィルター効果を認識しているのだろうか。