1　反転

代ゼミプレテストの問題です。
下の問題にある変換は「反転」というのでしょうか。円が直線または円に写ることは簡単にわかりますが、直線が円に写ることは、簡単ではないようです。少なくとも解答ではそうでした。
事実は有名なので、あるいは知られているのかもしれませんが、軌跡の考え方で簡単に処理することができます。

1.1　問題

複素数平面上に、原点Oを中心とする半径1の円があり、この円に鋭角三角形Tが内接している。点 z がTの周を1周するとき、$w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ で与えられる点 w の軌跡の長さをLとする。Tの3つの内角を用いてLを表せ。

1.2　解答例

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと、$w=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$.
したがって、$|w|=\dfrac{1}{|z|}$, $\arg w=\arg z\cdots$①.
また直線 l が単位円と異なる2点で交わっているとする。l に関して原点と対称な点を α で表す。このとき、この直線は、$|z|=|z-\alpha|$ と表すことができる。$z=\dfrac{1}{\bar{w}}$ ゆえ、w の式で表すと、$\left|w-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right|=\dfrac{1}{|\alpha|}$. これは原点を通る円であり、① からさらに直線 l と単位円の2交点を通る。
内接三角形をABCで表す。頂点Aの対辺BCと原点の距離は、中心角が $2A$ であることから $\cos A$ である。$\overline{0\alpha}=2\cos A$ ゆえ、辺BCを反転させた円弧の半径は $\dfrac{1}{2\cos A}$. よって弧の長さは、$2\pi\times\dfrac{1}{2\cos A}\times\dfrac{4A}{2\pi}=\dfrac{2A}{\cos A}$.
これが各辺に対して成り立つので、
$L=\dfrac{2A}{\cos A}+\dfrac{2B}{\cos B}+\dfrac{2C}{\cos C}$.