関数の極限

金沢光則

平成11 年 11 月 19 日

1　はじめに

先日ある機会があって、証明の “逆に” を調べてみました。軌跡の節にあるかと思い探してみたのですが、説明のための付け足しとしてあげられていただけでした。
学習院で行われた大学入試懇談会で、証明の逆を書かない大学生がほとんどで、書いていても高校の先生が「逆も成り立つと書け」と言っているので書いていると言う話がでていました。
教科書に無いんじゃ、定着しないのは無理ないなあと思った次第です。
さて、やりたかったのは、教科書でも不適切な “逆に” があるという実例を示したかったのです。
色々さがして、数IIIの所に見つけたのが次の例です。これって昔からありますよね。

2　教科書では

2.1　問題

$\lim_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$ が成り立つように定数 a, b の値を求めよ。

2.2　解答

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから $\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$ ゆえに $a+b=0$ すなわち　$b=-a.$

よって
$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

ゆえに $\dfrac{a}{2}=2.$ よって $a=4.$ したがって $b=-4.$

$a=4, b=-4$ のとき、与えられた等式が成り立つ。

よって $a=4, b=-4.$

2.3　逆に

この解答には、“逆に” という言葉が無いが、下から 2 行目の先頭に挿入されるべきだと思う。

3　何が問題か

$a=4$ を出すプロセスが同値変形でなく、必要条件を出しているにすぎないと思うのだろう、$a=4, b=-4$ を代入して、十分条件であることを確認している。

わかりやすさを明示するために書いているなら、教育的配慮ということで意味が無いわけではない。しかし、この “逆に” がなぜ必要でないかを教師が答えられないようでは、あるいは理解できないようでは混乱の元となる。
これが “逆” ではなく、確かめだなんて意見は聞く価値もない。

3.1 論理の構造

条件を　$p : \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 1} = 2, \quad q : b = -a, \quad r : a = 4, \quad s : b = -4$　とする。
解答では、最初に $p \Longrightarrow q$ を示し、その後、$p \wedge q \Longleftrightarrow r \wedge s$ を示している。
しかし、$p \Longrightarrow q$ という仮定の下では、$p \wedge q = p$ であるから – わかりにくければ、真理集合の包含関係を見ればよい – 、後半は $p \Longleftrightarrow r \wedge s$ を示しているのである。
このように b の条件まで合わせて考えると、自明性が曇るので、次のように考えるとわかりやすい。
p から q がでることから、$p \Longleftrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x} - a}{x - 1} = 2.$
この式は、同値変形で $\frac{a}{2} = 2$ となる。