群数列の解き方は厳密でない?!

金沢光則

平成 11 年 7 月 24 日

1　はじめに

群数列の問題で、第 n 群の初項を求める解答に $n \geqq 2$ が無い場合があって、末項を求めよとしない理由なのかと思い、関連することをまとめてみました。

2　問題例

奇数の列を次のような群に分ける。

$$1|3,5|7,9,11|13,15,17,19|\cdots$$

このとき、第 n 群の初項を求めよ。

2.1　標準的な解答

$n \geqq 2$ のとき、第 $(n-1)$ 群までに含まれる奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

ゆえ、第 n 群の初項は、奇数の列の

$$\frac{(n-1)n}{2}+1=\frac{n^2-n+2}{2}$$

番目の項である。第 k 項は $2k-1$ であるから、求める数は、

$$2\left(\frac{n^2-n+2}{2}\right)-1=n^2-n+1$$

$n=1$ のとき、$n^2-n+1=1-1+1=1$ となり成り立つ。

2.2　末項を使うと

第 n 群までに含まれる奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ゆえ、第 n 群の末項は、奇数の列の

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

番目の項である。第 n 群には n 個の項があるので、第 n 群の初項は、奇数列の

$$\frac{n^2+n}{2}-(n-1)=\frac{n^2-n+2}{2}$$

番目の数である。第 k 項は $2k-1$ であるから、求める数は、

$$2\left(\frac{n^2-n+2}{2}\right)-1=n^2-n+1$$

【注意】この場合は $n=1$ の場合を特別扱いしなくてよい。

3 問題点

数研、数研の新編、東書、啓林の教科書では、本文できちんと群数列を扱っていたのは、東書だけである。問題としては扱っているが、参考書も含めて具体的な数値を考える問題が多く、第 n 群の初項を求める設定は少ない。

しかし驚いたことに、数研の新編を除いて指導書の解答には、$n \geqq 2$ という条件もないし、もちろん場合分けもない。東書は教科書の本文に $n \geqq 2$ があるにも関わらずである。数研では、群に属する項数が n だから、第 n 群の最後が $\dfrac{n(n+1)}{2}$ という認識が大事と言っておきながら、$n \geqq 2$ という条件を付けずに $n-1$ 群の最後は... と述べている。

この認識が無いから、第 n 群の初項にこだわり、第 n 群の末項を求めよという問題にならないのではないかと思っている。

3.1 効果的な反例

確かにこれではだめだという例が欲しくて、少し考えてみた。問題は、『第 n 群の個数を $f(n)$ 個としたとき、$S(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ で決まる関数 $S(n)$ が $n=0$ に拡張できないか、拡張できても $S(0) \neq 0$ になるような関数 $f(n)$ を見つけよ。』である。

$f(n)$ が整関数や指数関数のときは、上のような関数は見つからない。

$$2,3,5,7,9,\cdots$$

のように与えることはできるが、これでは作為的なので、式で与えたいということなのである。

もし、反例を効果的に与える場合が存在しないことをもって、意図的に $n \geqq 2$ の場合を扱わないなら、それは数学ではない！

4 部分列をとる方法

$$1|3,5|7,9,11|13,15,17,19|\cdots$$

の初項からなる数列

$$1,3,7,13,21,\cdots$$

を考えるというわけである。

通常は階差をとる方法で計算するから、

$$n \geqq 2 \text{ のとき } 1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

となる。これは、階差数列の一般項が $\{2n\}$ と推測されることから出てくる。
この方法は、答えを求めるだけなら非常に簡単であるから、文系向きの解法といえるかもしれない。実際大昔には、数学でさえ、帰納法を $n=1$ のとき成り立つ。$n=2$ のとき成り立つ。$n=3$ のとき成り立つ。だから一般に成り立つだろう。と考えていたのだから。
しかし、やっぱりこれでは数学ではないだろう。
計算を見ていると、各群の初項 (あるいは末項) が最初から何番目と数えていくのと同じ計算をする事になる。この点で階差をとる方法を弁護する人がいる。しかし、結果が同じでも、やっている本人がわからずやっている状態は感心できない。教師のスタンスが問われていると思う。
昔は、このような問題では、各群の項数を式で与えていたように思う。どうして止めたのだろう。簡明さ、わかりやすさを重視しすぎて、厳密性を軽んじてきたせいか。文部省のやってきたことが垣間見えるように思う。
推測ではいけないのかというなら、次の 2 つを考えて欲しい。

1. 平面を直線でいくつに分けられるか。
   実際の問題はこうである。
   『平面に n 本の直線が、どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も同じ点で交わらないとするとき、これらの直線は平面をいくつの部分に分けるか』
   階差数列をとる方法では、これが答えだとはいえない気分が味わえる問題である。
2. 有限数列を与えたとき、そこまでは一致するようなもっと長い数列 (有限でも無限でもよい) を複数作ることができる。