ガウス記号と逆関数

金沢光則

平成 12 年 2 月 6 日

1 始めに

2000 年の数学オリンピック地方予選の問題に、次があった。

問題

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left(\left[\frac{k^2}{100}\right]+\left[10\sqrt{k}\right]\right)$ を求めよ。

Gauss 記号付きの和の値を計算するのは一般的には難しいが、今の例では、思わせぶりな 2 つの項を組み合わせると、非常に簡単に計算ができる。

2 計算

2.1 アイディア

関数 $y=\dfrac{x^2}{100}$ $(0<x\leqq 100)$ の逆関数は、$y=\sqrt{100x}=10\sqrt{x}$ $(0<x\leqq 100)$ である。

$0<x\leqq 100,\ 0<y\leqq 100$ の領域で考える。例えば $x=12$ が表す直線上の格子点は 100 個あり、$\left[\dfrac{12^2}{100}\right]$ の値は、直線 $x=12$ 上の格子点のうち、$y=\dfrac{x^2}{100}$ の境界を含む下方にある格子点の数と一致する。

これが、一般の自然数 x で成り立つ。

また、$y=\sqrt{100x}$ についても成り立っている。

グラフの対称性から、境界を無視すれば、これら 2 つの格子点が正方形にきれいに並ぶのである。

2.2 解答

$0<x\leqq 100,\ 0<y\leqq 100$ の領域で考える。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{x^2}{100}\right]$ の値は、領域内の格子点のうち、曲線 $y=\dfrac{x^2}{100}$ の境界を含む下方にある格子点の数と一致する。

また、$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left[10\sqrt{x}\right]$ の値は、領域内の格子点のうち、曲線 $y=10\sqrt{x}$ の境界を含む下方にある格子点の数と一致する。

関数 $y=\dfrac{x^2}{100}$ $(0<x\leqq 100)$ と $y=10\sqrt{x}$ $(0<x\leqq 100)$ は互いに逆関数なので、そのグラフは $y=x$ に関して対称である。

したがって、$y=10\sqrt{x}$ の境界を含む下方にある格子点の数は $y=\dfrac{x^2}{100}$ の境界を含む上方にある格子点の数と一致する。
よって、求める値は、領域内の格子点の数と、曲線 $y=10\sqrt{x}$ 上の格子点の数の和となる。この曲線上の格子点は、x が平方数になるときゆえ、10 個ある。
したがって、求める数は、

$$100\times 100+10=10010$$

この事実は容易に一般化できる。