1997/11/17 金沢光則 1999/03/10 訂正

# 1　２次関数のある性質

放物線 $y=x^2-2x+2$ と点 (2,3) を通る直線とで囲まれた部分の面積が最小となるような直線の方程式を求めよ。

## 1.1　疑問点

かなりの生徒が、

求める直線の傾きは $x=2$ における接線の傾きに等しい。

という仮定の下に計算していた。これは正しいのだが、なぜだろう。

## 1.2　１つの解答

囲まれた部分の面積は、$x=2$ のときの高さが $3-(2^2-2\cdot 2+2)=1$ であるような、$y=-x^2$ を平行移動した放物線と、$x$ 軸で囲まれた部分の面積に等しい。この性質を持つ放物線はすべて相似であることに注意すれば、面積が最大となるのは、(2,1) が頂点となるときである。この性質を持つ直線は、カバリエリの原理から、面積を $y$ 軸に平行な細い棒の集合と考え、その棒の下端を点 (2,2) を通る接線にまで押し下げて考えると、直線が接線のときは、接線が直線より下方にあることから、$x=2$ の前後で棒が下がるが、接線でないときは、$x=2$ の前後の片方で直線が放物線の上方にあり、そちら側で棒が上がる。したがって、直線が接線のときだけ $x=2$ の前後で棒が下がる。このことから、棒を $x$ 軸にまで押し下げたとき、$x=2$ が頂点となるのは、接線のときだけであることがわかる。
この主張の後半部分は、２次関数でなくても成り立つが、前半部分は成り立たない。
また、生徒の思い込みはどこから来るのだろう。対称性だろうか。だとすれば、後半の事実は無意識に正しいものと感じているのだろうか。